

UNIVERSITE DE LA MEDITERRANEE - AIX-MARSEILLE II
ECOLE SUPERIEURE DE MECANIQUE DE MARSEILLE

THESE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE LA MEDITERRANEE
AIX-MARSEILLE II

Discipline : ACOUSTIQUE

Présentée et soutenue publiquement par

Mlle Mitsuko ARAMAKI

Le vendredi 13 juin 2003

Analyse-synthèse de sons impulsifs : approches physique et perceptive

Co-directeurs de thèse : Dr. GUILLEMAIN Philippe
Dr. KRONLAND-MARTINET Richard

RAPPORTEURS : Dr. CAUSSE René
Pr. JENSEN Kristoffer

<u>JURY</u> :	Pr. DEPOLLIER Claude	Président
	Dr. CAUSSE René	Rapporteur
	Dr. GUILLEMAIN Philippe	Co-directeur de thèse
	Pr. JAUFFRET Claude	Examineur
	Pr. JENSEN Kristoffer	Rapporteur
	Dr. KRONLAND-MARTINET Richard	Co-directeur de thèse
	Dr. WARUSFEL Olivier	Examineur

Remerciements

Nombreuses sont les personnes qui m'ont permis de vivre ces années de thèse dans les meilleures conditions. Je tiens tout d'abord à remercier toute mon équipe d'accueil en commençant par mes co-directeurs de thèse : Richard Kronland-Martinet et Philippe Guillemain, pour la confiance qu'ils m'ont accordée et pour les nombreux conseils qu'ils m'ont apportés dans les moments difficiles pour arriver au bout de ce grand défi. Je remercie également les autres permanents de l'équipe : mister Cosmophone Thierry Voinier, la spécialiste du Irish Coffee Sølvi Ystad, Olivier Gipouloux pour sa bonne humeur et son inimitable *jus*, mon partenaire tennistique Christophe Vergez, Jean Kergomard et notre irremplaçable secrétaire d'équipe Marie-France Ghanous.

Je n'oublie pas les thésards mosycos avec qui j'ai partagé le quotidien du groupe de vie S2M et des barbecues mémorables : mon co-locataire de bureau Julien Bensa, notre technicien du son Grégory Pallone, les deux *Pink Floyd* Vincent Debut et Frédéric Gibaudan, la Miss Bulgarie de S2M Irina Zhekova, notre spécialiste du bois Loïc Brancheriau, Claudia Fritz exilée actuellement en Australie et notre fou chantant norvégien Snorre Farner.

Je voudrais remercier Dr. René Caussé et Pr. Kristoffer Jensen d'avoir accepté d'être les rapporteurs de ma thèse. Mes sincères remerciements vont également au Pr. Claude Depollier, Pr. Claude Jauffret et Dr. Olivier Warusfel pour avoir accepté de participer à mon jury de thèse.

Je voudrais remercier spécialement mes parents et toute ma famille du Japon (qui m'a toujours soutenu malgré la distance). Enfin, un grand merci à tous ceux qui ont supporté mes humeurs, mes angoisses et qui ont bien voulu (malgré cela) partager cette expérience unique à mes côtés.

Résumé

Ce travail de thèse porte sur l'analyse et la synthèse de sons impulsifs. Une des particularités de cette étude réside dans son approche pluridisciplinaire. Elle fait notamment appel à la mécanique vibratoire, aux méthodes de traitement de signaux non stationnaires et à la psychoacoustique. Dans le but d'établir des méthodes de synthèse efficaces, il est de plus en plus courant d'allier plusieurs approches qui peuvent être complémentaires. D'un point de vue physique, un son impulsif est le résultat de la mise en vibration d'un système résonant en régime d'oscillations libres. D'un point de vue perceptif, de nombreux tests psychoacoustiques montrent que l'oreille est capable d'identifier un son impulsif à partir de son amortissement (caractéristique du matériau) ainsi que de son contenu spectral qui définit la hauteur tonale (caractéristique de la géométrie de la structure).

Cette étude a débouché sur la mise en œuvre de modèles de synthèse permettant de simuler le comportement vibratoire de structures simples unidimensionnelles (du type poutre) et multidimensionnelles (du type membrane ou plaque mince) qui sont basés, lorsque cela est possible, sur la modélisation physique de la structure. Les paramètres des modèles sont définis par l'analyse de sons naturels et des grandeurs physiques caractéristiques. Par ailleurs, un modèle de synthèse a pu être mis en œuvre dans le cas de structures plus complexes où les solutions analytiques ne sont pas connues. Dans ce cas, les paramètres du modèle sont directement estimés par l'analyse d'une représentation conjointe du son, du type temps-échelle, en prenant en compte des grandeurs perceptives caractéristiques. Enfin, une application concernant la synthèse du son de piano est décrite. Un des modèles de synthèse a été utilisé pour reproduire la réponse impulsionnelle de la table d'harmonie du piano, qui est une structure multidimensionnelle complexe. Les paramètres du modèle ont été estimés à partir de l'analyse de signaux expérimentaux obtenus par des mesures effectuées sur un piano placé en chambre anéchoïque. Dans le cadre de la réalité virtuelle sonore, des fonctions de transfert de la table d'harmonie et de son rayonnement acoustique ont également été estimées afin de reproduire virtuellement le champ acoustique au niveau de la tête d'un pianiste.

Summary

This PhD thesis concerns the analysis and synthesis of impulsive sounds. The main specificity of this work lies in its pluridisciplinary approach. Notably, this study calls on vibratory mechanics, digital non stationary signal processing and psychoacoustics. To establish efficient synthesis methods, the combination of these complementary approaches have shown to be useful and pertinent. From a physical point of view, an impulsive sound is the result of a freely oscillating resonator excited by an impact. From a perceptual point of view, many psychoacoustic tests have shown that human hearing is able to identify on impulsive sound from its temporal damping (which depends on the characteristic of the material) and from its spectral contents correlated to the pitch (and which indicates the vibrating structure geometry).

This work leads to the implementation of efficient synthesis methods using digital waveguide models. They can simulate the vibratory behavior of unidimensional simple structures (like beams) and multidimensional ones (like membranes and thin plates). When it is possible, these models are based on the physical modelling of the structure. The model parameters are estimated from the analysis of natural sounds and from the physical features of the structure. Otherwise, a synthesis model is established in the case of complex multidimensional structures where analytical solutions do not exist. The model's parameters are estimated from the analysis of joint sound representations (like time-scale representations) which is well adapted to the analysis of non stationary signals.

Finally, an application of this study concerning the synthesis of piano sounds is described. One of the presented models is used to reproduce the impulse response of the piano soundboard. The models parameters are estimated from the analysis of experimental signals obtained from measurements made on a real piano in an anechoic room. From these measurements, transfer functions of the soundboard and its acoustic radiation are estimated to virtually reproduce the acoustic field at the pianist's head level.

Table des matières

Introduction	13
1 Caractérisation perceptive d'un son impulsif et méthodes d'analyse	17
1.1 Etudes perceptives	17
1.2 Grandeurs physiques importantes pour la perception	18
1.2.1 Grandeurs physiques intrinsèques au matériau	18
1.2.2 Grandeurs physiques liées à la géométrie	19
1.3 Représentations du signal pour l'analyse	20
1.3.1 Représentation temps-fréquence du signal	20
1.3.2 Représentation temps-échelle du signal	21
1.3.3 Représentation en échelle de Bark	23
1.4 Estimation de la loi d'amortissement moyen	28
1.5 Extraction des composantes sinusoïdales	29
1.5.1 Méthodes paramétriques	29
1.5.2 Méthodes non paramétriques	33
1.6 Applications : lois d'amortissement expérimentales	36
1.6.1 Dispositif expérimental	36
1.6.2 Exemples de représentations conjointes	37
1.6.3 Résultats d'estimation des lois d'amortissement	39
1.6.4 Conclusions	42
2 Cas d'une structure unidimensionnelle de type poutre	45
2.1 Modèle mécanique d'une structure homogène	45
2.1.1 Ondes longitudinales	46
2.1.2 Ondes transversales	46
2.2 Construction d'un modèle de synthèse	47
2.2.1 Fonction de transfert du modèle	48
2.2.2 Réponse impulsionnelle du modèle - Problème direct	50
2.2.3 Détermination des paramètres du modèle à partir de l'analyse de signaux - Problème inverse	51
2.2.4 Applications du modèle de synthèse unidimensionnel	52
2.3 Extensions du modèle unidimensionnel	52
2.3.1 Modèle de synthèse d'une poutre comportant un défaut ponctuel	52
2.3.2 Modélisation d'une poutre comportant un ou plusieurs défauts non ponctuels	55
2.4 Validation expérimentale d'un modèle de synthèse	56
2.4.1 Protocole expérimental	57
2.4.2 Résultats et interprétations	58
3 Cas de structures multidimensionnelles	63
3.1 Principales méthodes de simulation existantes	63

3.1.1	Réseau récursif de lignes à retard	63
3.1.2	Réseau de guides d'onde numériques	65
3.1.3	Modèles guides d'onde numériques par bande	68
3.1.4	Le langage CORDIS-ANIMA	69
3.1.5	La synthèse modale par MODALYS	70
3.2	Construction de deux modèles de synthèse	72
3.2.1	Cadre de l'étude	72
3.2.2	Construction d'un modèle de guides d'onde numériques couplés	73
3.2.3	Construction d'un modèle de synthèse généralisé	77
3.2.4	Comparaison entre les deux modèles de synthèse	82
3.3	Calage du modèle de synthèse par l'analyse de signaux expérimentaux	83
3.3.1	Protocole expérimental	83
3.3.2	Calage des paramètres du modèle	83
3.3.3	Résultats de calage	84
4	Cas de structures complexes	89
4.1	Construction du modèle de synthèse	89
4.1.1	Simulation de la loi d'amortissement	90
4.1.2	Simulation de la partie tonale du spectre	91
4.2	Calage du modèle de synthèse à partir de l'analyse des signaux	93
4.2.1	Estimation des paramètres du filtre évolutif	94
4.2.2	Estimation du paramètre des lignes à retard	96
4.2.3	Estimation des paramètres des filtres passe-bande	98
4.2.4	Résultats de calage	99
5	La table d'harmonie du piano :	
	une structure complexe aux fonctionnalités multiples	105
5.1	Description physique du piano	106
5.2	Description de la table d'harmonie d'un piano	108
5.2.1	Contribution de la table d'harmonie dans le son du piano	108
5.2.2	Modèle mécanique de la table d'harmonie d'un piano droit	109
5.3	Méthodes existantes de synthèse du son de piano	110
5.3.1	Résolution numérique des équations du mouvement	110
5.3.2	La méthode du <i>Commutated Piano Synthesis</i>	111
5.3.3	Modélisation multi-échelles	113
5.4	Simulation de la réponse impulsionnelle de la table d'harmonie	116
5.5	Prise en compte de la contribution de la table d'harmonie dans un modèle de vibrations de cordes couplées	117
5.5.1	Modèle de deux cordes couplées	117
5.5.2	Mesures expérimentales	119
5.5.3	La table d'harmonie comme élément de couplage entre les cordes	119
5.5.4	La table d'harmonie comme amplificateur	122
5.5.5	Estimation des fonctions de transfert	129
5.5.6	Restitution sonore	131
	Conclusion générale et Perspectives	133
	Annexes	139
A	Solutions analytiques pour la membrane et la plaque mince	141
A.1	Modèle mécanique de la membrane	141
A.1.1	Membrane rectangulaire	141

A.1.2	Membrane circulaire	142
A.2	Modèle mécanique de la plaque mince	143
A.2.1	Plaque mince rectangulaire isotrope	144
A.2.2	Plaque mince rectangulaire anisotrope	144
A.2.3	Plaque mince circulaire isotrope	145
B	Matériel utilisé	147
B.1	Ressource informatique	147
B.2	Matériel de mesures	147
C	Analyse-synthèse par modèle guide d'onde des vibrations de deux cordes de piano couplées	149
D	Caractérisation des produits collés à base de bois par l'analyse des vibrations dans le domaine acoustique	151
E	Synthèse de vibrations de structures bidimensionnelles à l'aide d'un modèle guide d'onde adapté par méthode d'optimisation	153
	Bibliographie	155
	Références sonores	159

Introduction

Le travail présenté dans ce document s'inscrit dans un des thèmes de recherche de mon équipe d'accueil au LMA (Laboratoire de Mécanique et d'acoustique) qui sont : la modélisation, la synthèse et le contrôle des signaux sonores et musicaux. Cette étude a porté sur la synthèse de sons impulsifs par approches physique et perceptive. Une des particularités de cette étude réside dans son approche pluridisciplinaire. Elle fait notamment appel à la mécanique vibratoire, aux méthodes de traitement de signal non stationnaire et à la psychoacoustique.

Dans le but d'établir des méthodes de synthèse efficaces, il est de plus en plus courant d'allier plusieurs approches qui peuvent être complémentaires. En particulier, un son peut être défini de différentes manières suivant les disciplines :

- *d'une manière physique* : un son est le résultat d'un phénomène physique d'origine acoustique ou mécanique consistant en une variation de pression acoustique, de vitesse vibratoire ou de densité du fluide. Le son se propage en déformant localement le milieu environnant.
- *d'une manière perceptive* : il s'agit de la sensation procurée par cette onde, qui est reçue par l'oreille, puis transmise au cerveau et déchiffrée par celui-ci. L'oreille ne peut percevoir que les ondes dont la fréquence est comprise entre 20 Hz et 20 kHz . Il existe par ailleurs un seuil absolu d'audition qui correspond à l'intensité à laquelle un son pur (sinusoïde) est juste audible. Ce seuil peut être approximé par une fonction caractéristique [65].

En plus de cette approche pluridisciplinaire, cette étude est également basée sur le concept d'*analyse-synthèse*, représenté sur la figure (1).

Il consiste à reproduire un son à l'aide d'un modèle de synthèse à partir de l'analyse d'un ou de plusieurs sons naturels. Pour cela, il faut d'une part mettre au point des modèles de synthèse pertinents pour la description du type de sonorités recherché. D'autre part, il faut mettre en œuvre des méthodes d'analyse de sons naturels capables d'extraire des grandeurs utiles pour la détermination des paramètres du modèle de synthèse.

Dans le cadre de l'analyse-synthèse, l'objectif consistant à simuler des sons que l'on perçoit implique d'une part la modélisation physique de la structure émettrice et d'autre part la prise en compte de critères perceptifs. Dans le domaine de la simulation sonore, les sons à caractère impulsif posent encore des problèmes intéressants aussi bien au niveau de leur formalisme que des méthodes d'analyse.

De même que l'on reconnaît une cloche fêlée au son qu'elle produit, l'oreille humaine est capable de détecter des irrégularités dans le comportement vibratoire d'un objet. Mis à part dans le cas des instruments de percussion, un son impulsif peut évoquer dans notre imagination différentes situations que l'on peut rencontrer dans notre vie quotidienne : un choc, une porte qui claque, un objet qui tombe ... Ainsi, la synthèse des sons doit également prendre en compte l'image mentale que l'on peut se faire en écoutant un son.

D'une manière générale, les méthodes de synthèse sonore peuvent être classées en deux catégories :

- *les modèles de signaux* : ces modèles décrivent le signal à reproduire sous la forme d'une formule mathématique sans prendre en compte l'origine de la production. Parmi ces méthodes, on peut citer : la synthèse additive, la synthèse soustractive, la synthèse par modulation de fréquence (la synthèse FM), la synthèse par distorsion non-linéaire, ... Ces modèles se basent

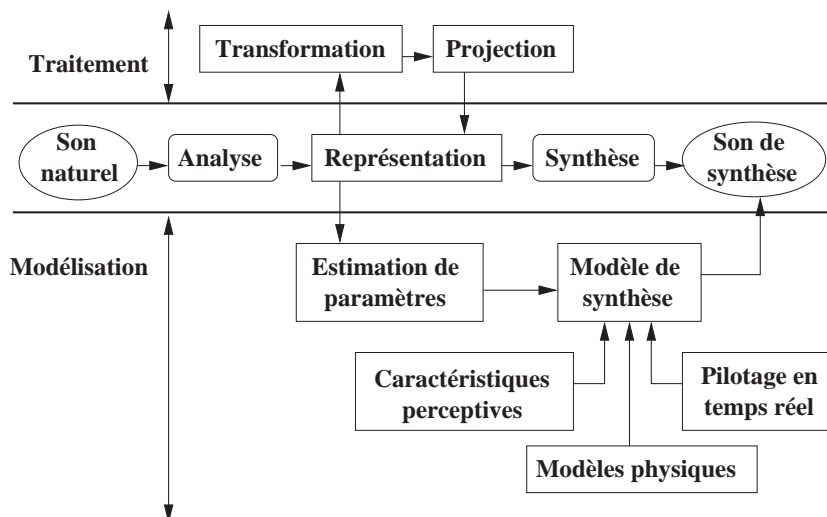


FIG. 1 – Concept d'analyse-synthèse. Le son de synthèse est obtenu à l'aide d'un modèle dont les paramètres sont directement estimés des propriétés de la représentation du son naturel. Cette représentation est obtenue par l'analyse du son naturel et peut subir des transformations intimes afin de générer de nouvelles sonorités. Par ailleurs, le modèle de synthèse est issu d'un modèle mécanique (ou plus généralement physique) et prend également en compte des critères perceptifs. Ce modèle de synthèse peut être piloté en temps-réel.

sur la définition perceptive du son (voir p. 13).

- les modèles physiques : ces méthodes tentent de modéliser le système mécanique qui a produit le son. Contrairement aux modèles de signaux, les paramètres des modèles physiques sont directement reliés aux phénomènes physiques mis en jeu lors de la production sonore. Il est toutefois utile de prendre en compte des critères perceptifs car l'objectif final est de reproduire le son qui soit le plus satisfaisant à l'oreille et non de décrire le plus fidèlement possible tous les mécanismes de la structure. Ces modèles se basent sur la définition physique d'un son (voir p. 13).

Position du problème

Parmi les nombreuses catégories de sons existants, je me suis intéressée à l'étude de sons impulsifs. En particulier, un son impulsif peut être caractérisé par sa durée temporelle. En effet, les sons¹ peuvent généralement être classés de la manière suivante :

- le son impulsionnel : durée inférieure à 300 millisecondes,
- le son impulsif : durée inférieure à 1 seconde,
- le son continu : durée supérieure à 1 seconde.

D'un point de vue physique, un son impulsif est le résultat d'un impact entre un exciteur et un résonateur dont la réponse impulsionnelle est brève. Le système mécanique qui a ainsi été sollicité se trouve en régime d'oscillations libres. Dans ce travail, je ne m'intéresserai pas directement à l'étude de l'interaction exciteur/résonateur car dans le cas de régime libre, le son produit provient essentiellement du comportement vibratoire du résonateur. Néanmoins, cette interaction sera indirectement décrite par l'estimation des paramètres dans le cadre de l'analyse-synthèse.

1. d'après l'Institut Universitaire de Médecine du Travail de Rennes.

Dans le but de mettre en œuvre un modèle de synthèse efficace et satisfaisant, deux hypothèses de départ peuvent être envisagées lorsque l'on cherche à reproduire le comportement vibratoire d'une structure :

- la structure peut être modélisée simplement et les solutions analytiques sont connues,
- l'équation du mouvement est difficile à établir et les solutions analytiques ou bien numériques ne sont pas connues. Cette hypothèse convient également dans le cas où la structure que l'on veut étudier n'existe pas dans la réalité (on se place alors dans le cadre de la réalité virtuelle).

Le premier cas fait appel aux résultats analytiques des théories vibratoires afin de déterminer les grandeurs physiques importantes pour la synthèse. Les paramètres du modèle de synthèse correspondant pourront ensuite être déduits de ces grandeurs physiques. La problématique consiste avant tout à reproduire un son qui soit satisfaisant à l'oreille et non à décrire le plus fidèlement possible les phénomènes physiques mis en cause. Ainsi, la prise en compte de critères perceptifs autorise certaines *imperfections* du modèle dans la mesure où ces dernières ne sont pas audibles. Ces critères peuvent par ailleurs, varier en fonction du public visé. En particulier, un public averti portera davantage l'attention sur des aspects précis que le grand public ne distinguera pas.

La synthèse de sons par modèle physique nécessite une modélisation des structures physiques qui les produisent. La difficulté est accrue lorsque ces structures deviennent complexes. Dans le cas où la structure est trop complexe, on rejoint la deuxième hypothèse de départ. La seule source d'information est le signal que l'on cherche à reproduire. Les caractéristiques mécaniques de la structure ne sont pas connues ou ne sont pas accessibles. Il faut alors mettre en œuvre une méthode d'analyse spécifique permettant de déterminer les grandeurs pertinentes d'un point de vue perceptif et de les relier aux paramètres du modèle de synthèse.

Dans ce document, je vais tout d'abord traiter le cas de structures simples pour lesquels les équations de la mécanique peuvent être aisément établies. Je vais en particulier traiter les cas de structures unidimensionnelles de type poutre (chapitre 2) et de structures multidimensionnelles simples du type membrane ou plaque mince (chapitre 3). J'exposerai par la suite une méthode de synthèse permettant de traiter à priori n'importe quelle structure (chapitre 4) car elle est basée sur l'extraction de paramètres à partir de la seule source d'information accessible qui est le signal lui-même, et non sur la modélisation physique de la structure émettrice. Enfin, nous verrons une application concrète de ces modèles dans le cas de la synthèse du son de piano (chapitre 5) qui a constitué un large projet de recherche de mon équipe d'accueil.

Chapitre 1

Caractérisation perceptive d'un son impulsif et méthodes d'analyse

Un son impulsif est une désignation pouvant convenir à de nombreux sons. Dans tous les cas, il correspond à la réponse vibratoire à un choc bref d'une structure multidimensionnelle (poutre, plaque, salle). A l'écoute, notre oreille est capable de détecter plusieurs facteurs permettant de caractériser ce type de son. En particulier, sur la base d'études psychoacoustiques, je présenterai dans un premier temps les grandeurs physiques qui sont importantes d'un point de vue perceptif puis dans un second temps, je présenterai différentes méthodes d'analyse qui permettent d'extraire du signal ces grandeurs.

1.1 Etudes perceptives

Dans la plupart des études psychoacoustiques, on peut lire que essentiellement deux grandeurs caractérisent perceptivement un son donné : la loi d'amortissement qui caractérise la nature du matériau et les résonances contenues dans le signal qui sont caractéristiques de la forme géométrique de la structure. En effet, la manière dont le son décroît nous permet d'identifier la nature du matériau tout comme nous pouvons identifier à l'oreille si un son est plutôt métallique que boisé par exemple. Par ailleurs, la hauteur tonale du signal liée aux résonances émergentes nous permet d'avoir une idée de la géométrie de la structure tout comme nous associons un son grave plutôt à une structure de grande dimension et un son aigu plutôt à une structure de dimension inférieure.

Des études psychoacoustiques concernant la reconnaissance de la nature du matériau et de la géométrie par la simple écoute du son, ont été initialement entrepris par Gaver [33] sur des barres frappées en régime d'oscillations libres (dans le cas de régime forcé ou auto-entretenu, l'amortissement du son est fortement modifié et il est plus difficile de reconnaître la nature du matériau). Dans son étude, il a pu mettre en évidence de fortes corrélations entre les attributs physiques (nature du matériau et longueur de la barre) aux attributs perçus (nature du matériau perçu et longueur perçue). En parallèle, Lakatos *et al.* ont étudié la manière dont les sujets reconnaissent perceptivement la forme géométrique des sections entre deux barres frappées de longueur identique [45]. Par la suite, les travaux entrepris par Wildes et Richards viennent conforter ces résultats [68]. La nature du matériau est principalement perçue par la décroissance temporelle du son produit. Cette décroissance temporelle dépend généralement de la fréquence considérée. Plus précisément, ils concluent que le coefficient de friction interne est la seule grandeur physique caractéristique du matériau. Ce coefficient $\tan \Phi$ est défini par la relation suivante :

$$\tan \Phi = \frac{1}{\pi f t_e} \quad (1.1)$$

avec f la fréquence considérée et t_e le temps nécessaire pour que l'amplitude initiale décroisse de

1/e. Les travaux de Klatzky *et al.* [44] et de Tucker *et al.* [66] ont également permis de conclure sur le fait que l'amortissement du son produit était un facteur déterminant dans la perception du matériau. Ces expériences ont par ailleurs permis de renforcer l'idée d'une catégorisation des matériaux. En particulier, les sujets ont très distinctement reconnu le métal du plastique ou le métal du bois. Par contre, la distinction entre le plastique et le bois a été moins bien perçue.

Par ailleurs, Carello *et al.* concluent de leurs études que la perception des formes géométriques s'effectue principalement à travers la perception des fréquences propres de la structure [19]. Des expériences perceptives visant à identifier la longueur des barres en métal à partir des sons produits ont permis d'établir de fortes corrélations entre la longueur réelle (reliée directement aux fréquences propres) et la longueur perçue.

1.2 Grandeurs physiques importantes pour la perception

Si l'on se base sur les études perceptives présentées précédemment, ces grandeurs physiques peuvent être classées en deux catégories : celles qui sont intrinsèques au matériau, et celles qui sont liées à la forme géométrique de la structure [26]. Il est ainsi intéressant de définir quelles sont les propriétés invariantes pour un ensemble de structures constituées du même matériau mais ayant des formes géométriques différentes et par ailleurs celles qui sont invariantes pour un ensemble de structures ayant la même forme géométrique mais conçues dans des matériaux différents.

1.2.1 Grandeurs physiques intrinsèques au matériau

Cas d'un système conservatif :

Pour un système conservatif, les principales grandeurs physiques qui sont intrinsèques à la nature du matériau sont :

- **la densité massique** : pour le cas homogène, elle représente la masse du matériau par unité de longueur, de surface ou de volume.
- **le module élastique** : la propriété élastique d'un matériau s'exprime sous la forme d'une équation constitutive qui est indépendante de la géométrie et qui dépend seulement de la nature du matériau. En particulier, on peut citer le module d'Young (qui est défini à partir de la loi de Hooke) ou le module de cisaillement. Les propriétés élastiques d'un matériau anisotrope sont définies par un tenseur algébrique.
- **la vitesse de propagation** : elle est différente dans le cas des ondes de compression ou de flexion. Elle est définie à partir des deux grandeurs précédentes, par conséquent, c'est également une grandeur physique intrinsèque au matériau.

Ces grandeurs n'étant valables que dans le cas de systèmes conservatifs, elles ne vont pas pouvoir caractériser les sons impulsifs qui sont par définition de nature transitoire. Il faut pour cela, considérer des systèmes dissipatifs pour lesquels la réponse à une impulsion est brève.

Cas d'un système dissipatif :

Dans un système dissipatif, la loi d'amortissement est la principale caractéristique physique intrinsèque au matériau importante d'un point de vue perceptif. Les causes de phénomènes dissipatifs dans un système mécanique sont nombreuses. Mais dans tous les cas, ils sont la conséquence d'un transfert d'énergie soit vers le milieu environnant par interaction fluide-structure soit vers un autre système mécanique. Dans le cas de matériaux isotropes, les propriétés visco-élastiques sont caractéristiques de la signature acoustique du matériau. Les modèles visco-élastiques sont nombreux et on peut citer les modèles de Kelvin, de Maxwell ou bien de Zener pour les plus connus.

Par contre, dans le cas de matériaux anisotropes, on ne peut pas déterminer de grandeurs qui sont invariantes de la forme géométrique de la structure.

Dans le cas des plaques, on peut lire dans la littérature que les phénomènes de perte sont dus à deux causes principales [18], [46]. Dans l'équation du mouvement qui régit le déplacement transversal z d'une plaque homogène isotrope, les phénomènes de pertes sont pris en compte de la manière suivante :

$$\rho h \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + R \frac{\partial z}{\partial t} + \tilde{D} \Delta^2 z = 0 \quad \text{avec} \quad \tilde{D} = \frac{\tilde{E} h^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (1.2)$$

ρ correspond à la masse volumique, h à l'épaisseur, R aux interactions avec le fluide environnant, \tilde{D} à la constante de rigidité en présence de dissipation, \tilde{E} au module d'Young dynamique en présence de dissipation, ν au coefficient de Poisson. En pratique, on ajoute un terme correctif dans l'expression du module d'Young dynamique E tel que le module d'Young en présence de dissipation s'écrit :

$$\tilde{E} = E[1 + j(\delta_{ve} + \delta_{te})] \quad (1.3)$$

La grandeur δ_{ve} (appelée angle de pertes viscoélastiques) traduit les pertes viscoélastiques qui correspondent aux dislocations dans le matériau. La grandeur δ_{te} (appelée angle de pertes thermoélastiques) traduit les pertes thermoélastiques par effet Joule qui correspondent aux conductivités thermiques dans le matériau.

Pour la grandeur R , on différencie les frottements visqueux dans le fluide environnant (noté R_{fl}) et les pertes par rayonnement acoustique (noté R_{ray}). Pour les vibrations de faible amplitude, la résistance mécanique du fluide est faible et de manière générale, les phénomènes de dissipation peuvent être négligés. Les pertes par rayonnement dépendent de l'existence d'une fréquence critique qui est fonction des caractéristiques du matériau et de l'épaisseur de la plaque. A cette fréquence, la vitesse des ondes de flexion dans le matériau est égale à celle des ondes acoustiques dans le fluide et les pertes par rayonnement sont les plus importantes. Le rayonnement est plus efficace au-dessus de cette fréquence.

1.2.2 Grandeurs physiques liées à la géométrie

On peut par ailleurs, définir des grandeurs physiques liées à la géométrie. De manière générale, l'équation du mouvement qui régit les vibrations u d'un corps isotrope peut toujours s'écrire :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{E}{\mu} Lu \quad (1.4)$$

L représente l'opérateur différentiel qui traduit la déformation locale, E le module élastique et μ la densité massique du matériau. Par exemple, dans le cas des cordes ou des membranes, L est l'opérateur Laplacien (unidimensionnel pour les cordes et bidimensionnel pour les membranes) alors que dans le cas des barres et des plaques, L est l'opérateur Laplacien au carré (unidimensionnel pour les barres et bidimensionnel pour les plaques). La géométrie et les conditions aux limites du corps déterminent les valeurs propres λ_n de l'opérateur L et les pulsations propres s'écrivent :

$$\omega_n^2 = \lambda_n c^2 \quad \text{avec} \quad c^2 = \frac{E}{\mu} \quad (1.5)$$

Alors que la nature du matériau est contenue dans la valeur de c comme nous l'avons vu dans le paragraphe 1.2.1, les grandeurs liées à la forme géométrique de la structure sont contenues dans les valeurs propres λ_n . Elles correspondent aux résonances contenues dans le spectre du signal et sont par conséquent importantes d'un point de vue perceptif.

1.3 Représentations du signal pour l'analyse

Dans ce paragraphe, quelques méthodes d'analyse permettant d'extraire du signal les grandeurs physiques décrites en 1.2, seront présentées. En particulier, nous allons définir une méthode d'estimation de la loi d'amortissement (caractéristique de la nature du matériau) et des fréquences propres (caractéristiques de la géométrie de la structure). Pour cela, il est nécessaire d'avoir une représentation adaptée du signal à analyser. L'analyse d'un son transitoire nécessite d'avoir des informations aussi bien temporelles que fréquentielles. Ces considérations ont orienté mon choix vers des représentations conjointes du type temps-fréquence, temps-échelle ou en échelle de Bark. Nous verrons que les deux dernières représentations sont mieux adaptées dans notre cas que la représentation temps-fréquence. Notamment, la prise en compte de critères perceptifs implique une représentation suivant l'axe fréquentiel se rapprochant du fonctionnement de l'oreille humaine, ce qui n'est pas possible dans le cas de la représentation temps-fréquence.

1.3.1 Représentation temps-fréquence du signal

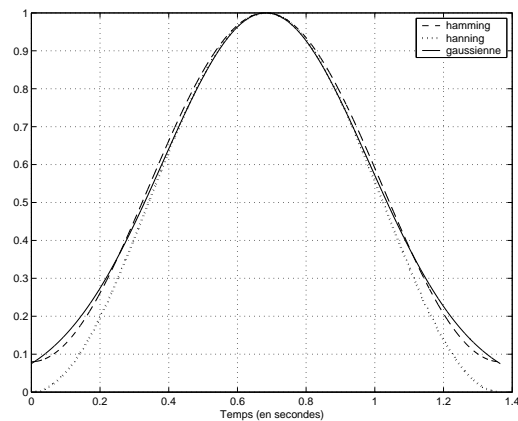
Dans le formalisme de la transformée de Fourier, le signal est représenté dans une base constituée d'exponentielles complexes. L'information temporelle est difficilement accessible. En effet, ces exponentielles sont très bien localisées en fréquence, mais pas en temps, car leur support est infini. Si on veut représenter les propriétés fréquentielles d'un signal localement en temps, il convient de le décomposer sur une famille de fonctions localisées simultanément en temps et en fréquence¹. Ainsi, la représentation temps-fréquence d'un signal est obtenue par transformée de Fourier à court terme qui remplace l'exponentielle (fonction de base) de la transformée de Fourier par le produit d'une exponentielle et d'une fenêtre localisée en temps.

La représentation temps-fréquence $S(\tau, f)$ d'un signal temporel $s(t)$ est définie de la manière suivante :

$$S(\tau, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)g(t - \tau)e^{-2i\pi f(t-\tau)} dt \quad (1.6)$$

Elle a ainsi deux arguments : le temps τ , et la fréquence f . La fenêtre temporelle $g(t)$ est symétrique et d'énergie finie. En général, on choisit d'utiliser des fenêtres gaussiennes, de Hamming ou de Hanning dont les expressions sont décrites dans le tableau ci-dessous.

Nom	Expression
Gaussienne	$g(t) = e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$
Hamming	$g(t) = 0.54 + 0.46 \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$
Hanning	$g(t) = 0.5 - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$



où σ représente l'écart-type et T la longueur de la fenêtre. Les propriétés de cette représentation sont déterminées en fonction de la fenêtre d'analyse choisie. Dans tous les cas, cette représentation est obtenue par translation en temps et en fréquence d'une fenêtre d'analyse unique. Les résolutions fréquentielle Δf et temporelle Δt correspondant à cette représentation sont reliées par l'inégalité de Gabor-Heisenberg :

$$\Delta t \Delta f \geq \frac{1}{4\pi} \quad (1.7)$$

1. http://cas.ensmp.fr/~chaplais/Wavetour.presentation/atomes/Atomes_temps-frequence.html

qui devient une égalité dans le cas de la gaussienne. Ce principe traduit le fait que lorsque le support temporel de la fenêtre d'analyse est diminué en temps, son support fréquentiel est inévitablement augmenté. Dans le cas de la représentation temps-fréquence, la résolution temps-fréquence est identique quelque soit la fréquence d'analyse comme le montre la figure (1.1).

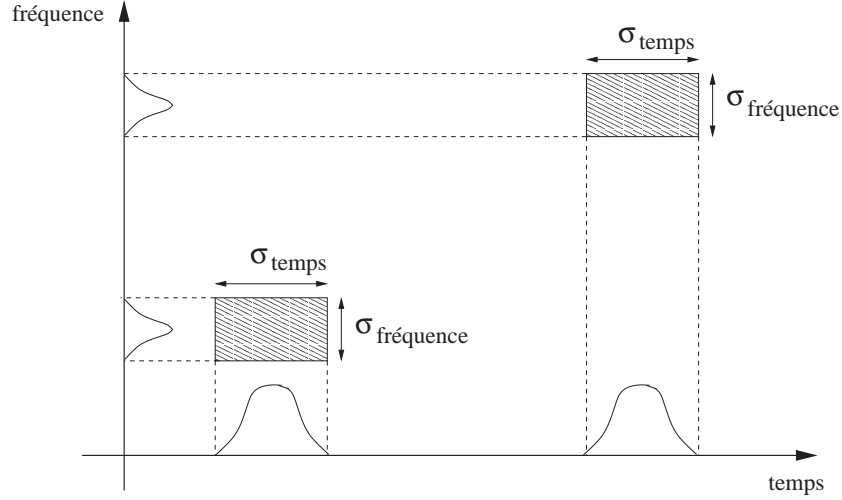


FIG. 1.1 – La représentation temps-fréquence d'un signal est obtenue en utilisant une même fenêtre d'analyse qui est translatée en temps et en fréquence. Les propriétés de la représentation sont déterminées par celles de cette fenêtre.

1.3.2 Représentation temps-échelle du signal

La représentation temps-échelle est obtenue par décomposition du signal avec un ensemble de fonctions appelées ondelettes [23]. Ainsi, la transformée en ondelette $S(b,a)$ d'un signal réel $s(t)$ est définie en fonction d'une ondelette d'analyse de référence $g(t)$ de la manière suivante :

$$S(b,a) = \int s(t) \bar{g}_{(b,a)}(t) dt \quad (1.8)$$

avec :

$$g_{(b,a)}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} g\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad \text{avec } a \in \mathbb{R}^{*+} \text{ et } b \in \mathbb{R} \quad (1.9)$$

où \bar{g} définit le complexe conjugué de g . Le paramètre a permet de dilater ou de contracter l'ondelette de référence $g(t)$ alors que le paramètre b permet de la translater dans le temps. La normalisation par un facteur \sqrt{a} permet de conserver la norme L^2 pour toutes les ondelettes, telle que $\|g_{(b,a)}(t)\|_2 = \|g(t)\|_2$. La fonction (1.8) est également définie en fonction des transformées de Fourier respectives $\hat{s}(\omega)$ et $\hat{g}(\omega)$ de $s(t)$ et $g(t)$ en utilisant le théorème de Parseval :

$$S(b,a) = \frac{1}{2\pi} \int \hat{s}(\omega) \bar{\hat{g}}_{(b,a)}(\omega) d\omega \quad \text{avec} \quad \hat{g}_{(b,a)}(\omega) = \sqrt{a} \hat{g}(a\omega) e^{ib\omega} \quad (1.10)$$

Il faut par ailleurs que l'ondelette de référence $g(t)$ et toutes les autres ondelettes construites à partir de $g(t)$ vérifient la propriété suivante :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{g}(\omega)|^2}{\omega} d\omega < +\infty \quad (\text{condition d'admissibilité}) \quad (1.11)$$

qui en pratique se réduit à :

$$\int_0^{\infty} g(t) dt = g(0) = 0 \quad (\text{moyenne nulle}) \quad (1.12)$$

Cette représentation est donc définie dans un espace à deux dimensions dont les axes correspondent au paramètre a et au paramètre b .

Cette transformation est inversible et on peut reconstruire le signal $s(t)$ à partir de la famille de fonctions $g_{(b,a)}(t)$ pondérée par les coefficients $S(b,a)$ tel que :

$$s(t) = \iint S(b,a) g_{(b,a)}(t) \frac{da db}{a^2} \quad (1.13)$$

Parmi toutes les fonctions existants dans le formalisme des ondelettes, je choisis d'utiliser une ondelette de Morlet complexe définie dans le temps de la manière suivante :

$$g(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{i2\pi f_c t} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} \quad (1.14)$$

avec f_c la fréquence centrale et σ l'écart-type de la gaussienne. Cette fonction est tout simplement une gaussienne d'écart-type σ , modulée par une exponentielle complexe de fréquence f_c . La transformée de Fourier de $g(t)$ s'écrit :

$$\hat{g}(\omega) = e^{-\frac{(\omega - \omega_c)^2 \sigma^2}{2}} \quad (1.15)$$

avec $\omega_c = 2\pi f_c$. La restriction $S_a(b)$ de la transformée $S(b,a)$ à a fixé s'écrit :

$$S_a(b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int s(t) \bar{g}_a(t-b) dt \quad (1.16)$$

Si je pose $f_a(t) = \bar{g}_a(-t)$, alors on peut réécrire la relation précédente :

$$S_a(b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int s(t) f_a(b-t) dt = \frac{1}{\sqrt{a}} (s * f_a)(b) \quad (1.17)$$

La restriction de la transformée $S(b,a)$ à a fixé est équivalente à une opération de convolution entre le signal $s(t)$ et la fonction $f_a(t)$. Dans le domaine fréquentiel, cette opération revient à un filtrage du signal par la fonction $\hat{f}_a(\omega)$ définie de la manière suivante :

$$f_a(t) = g_a(-t) = g\left(-\frac{t}{a}\right) \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{f}_a(\omega) = \frac{1}{a} g(a\omega) \quad (1.18)$$

Cette transformation permet d'avoir une représentation du signal telle que le rapport entre la largeur de bande de la fonction d'analyse et la pulsation centrale, noté $\frac{\Delta\omega}{\omega}$ soit constant quelle que soit la valeur de a . En effet pour un a donné, si on suppose que $g(a\omega)$ est centrée sur $a\omega_c$ et que sa largeur de bande est définie par l'intervalle $[a\omega_{min}; a\omega_{max}]$, alors :

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{a\omega_{max} - a\omega_{min}}{a\omega_c} = \frac{\omega_{max} - \omega_{min}}{\omega_c} \quad (1.19)$$

Ce rapport ne dépend donc pas du paramètre a . Je choisis de construire un ensemble d'ondelettes tel que chaque fenêtre d'analyse ait pour largeur de bande un tiers d'octave, ce qui se traduit par :

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{1}{3} \quad (1.20)$$

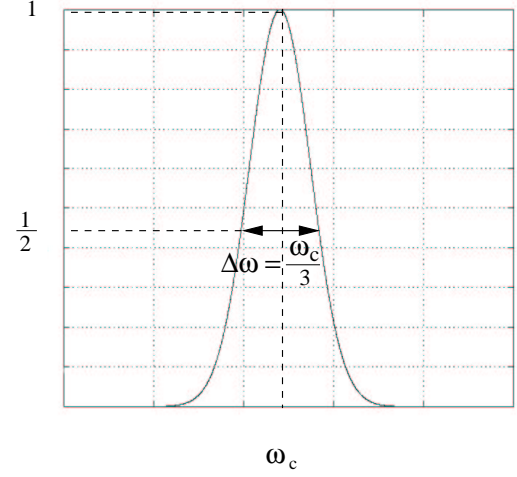
La représentation temps-échelle issue de cette analyse va alors correspondre à celle qui est communément assimilée à l'oreille humaine. En particulier, l'ensemble des fonctions d'analyse ainsi construit est similaire à la notion de *bandes critiques* qui sera précisée dans le paragraphe suivant.

La largeur de bande étant définie à mi-hauteur, on calcule le paramètre σ pour que la relation (1.20) soit vérifiée à mi-hauteur de la fonction, comme l'illustre la figure de droite :

$$\hat{g}_a \left(\omega_c + \frac{\Delta\omega}{2} \right) = \frac{1}{2}$$

En utilisant la relation (1.15), on peut définir l'écart-type de l'ondelette de référence :

$$\sigma = \frac{6}{\omega_c} \sqrt{2 \ln(2)}$$



Je choisis de construire le banc de filtre par contraction de l'ondelette de référence. Je centre donc cette dernière sur une fréquence proche du seuil maximum de l'audition humaine et je pose $f_c = 20 \text{ kHz}$. Le paramètre a est déterminé par le fait que je choisis d'effectuer une analyse en tiers d'octave (trois fenêtres d'analyse par octave). Je cherche tout d'abord le nombre d'octaves à prendre en compte, soit l'entier N qui vérifie la relation suivante :

$$2^N < \frac{f_c}{f_{min}} < 2^{N+1} \quad (1.21)$$

avec f_{min} représentant la fréquence minimale en dessous de laquelle l'analyse n'est plus effectuée. Dans mon cas, si je pose $f_{min} \approx 20$ (cette fréquence correspond au seuil minimum de l'audition humaine), j'en déduis alors la valeur $N = 10$. L'ensemble des valeurs de a que je note $\{a_n\}$ est alors défini par :

$$a_n = 2^{n/3} \quad \text{avec} \quad n = 1, \dots, 3N \quad (1.22)$$

Le tableau (1.1) montre la correspondance entre les valeurs du paramètre d'échelle et de la fréquence centrale de l'ondelette associée. La figure (1.2) représente cette courbe de correspondance.

Le banc de filtres ainsi construit est constitué de $3N$ ondelettes qui permettent d'analyser des signaux dans le domaine de fréquences audible. La figure (1.3) représente trois fonctions d'analyse appartenant à cette famille.

L'ensemble des filtres d'analyse construits est représenté sur la figure (1.4) sur une échelle de fréquence linéaire et logarithmique. On peut noter que deux filtres successifs se superposent lorsque leur amplitude maximale diminue d'un facteur $\sqrt{2}$, comme le montre la figure (1.5).

1.3.3 Représentation en échelle de Bark

L'analyse des signaux peut également être effectuée sur une échelle de Bark de manière à reproduire encore plus exactement l'analyse de l'oreille humaine. Cette échelle de fréquence est fortement liée à la notion de *bandes critiques* caractéristiques, tout comme dans le cas précédent d'une analyse en tiers d'octave.

En effet, l'oreille se comporte comme un banc de filtres réalisant une partition non-régulière de l'axe fréquentiel, la largeur de chaque partition augmentant avec la fréquence. Il divise toute la zone des fréquences audibles en 25 bandes adjacentes appelées *bandes critiques*. Ce concept a été défini depuis l'expérience de E. Zwicker qui lui a permis de déterminer l'intervalle de fréquences

Numéro d'échelle (n)	Paramètre d'échelle (a_n)	Fréquence centrale (Hertz)	Numéro d'échelle (n)	Paramètre d'échelle (a_n)	Fréquence centrale (Hertz)
1	1.3	19 049	16	40.3	595
2	1.6	15 119	17	50.8	472
3	2.0	12 000	18	64.0	375
4	2.5	9 524	19	80.6	298
5	3.2	7 560	20	101.6	236
6	4.0	6 000	21	128.0	187
7	5.0	4 762	22	161.3	149
8	6.3	3 780	23	203.2	118
9	8.0	3 000	24	256.0	94
10	10.1	2 381	25	322.5	74
11	12.7	1 890	26	406.4	59
12	16.0	1 500	27	512.0	47
13	20.2	1 191	28	645.1	37
14	25.4	945	29	812.7	30
15	32.0	750	30	1024.0	23

TAB. 1.1 – Correspondance entre le paramètre d'échelle a_n et la fréquence centrale (en Hertz) de l'ondelette associée.

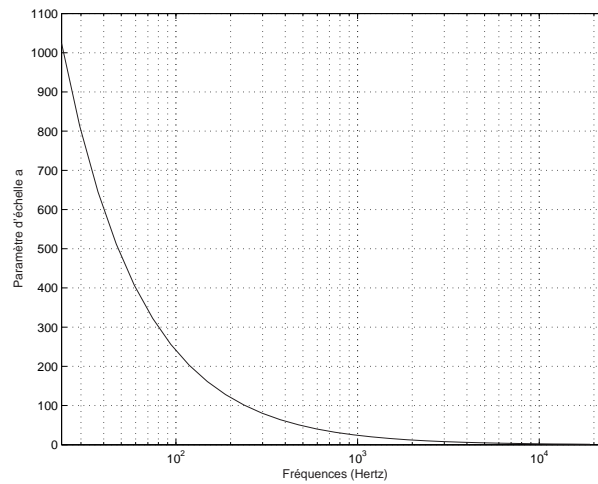


FIG. 1.2 – Courbe de correspondance entre le paramètre d'échelle et les fréquences (en Hertz). L'axe des abscisses est logarithmique.

minimum utile au masquage d'un son pur par une bande de bruit pour chaque fréquence du spectre audible [70]. C'est alors qu'il a défini une nouvelle échelle de fréquences, le **Bark**, telle que sur cette échelle, chaque bande critique possède une largeur constante de 1 unité. L'expression suivante donne une approximation possible de la relation entre le Bark et le Hertz :

$$B = 13 \arctan(0.76f) + 3.5 \arctan\left(\frac{f}{7.5}\right)^2 \quad (1.23)$$

où B est le nombre de Bark et f la fréquence en kHz . Les largeurs de bande sont définies de la

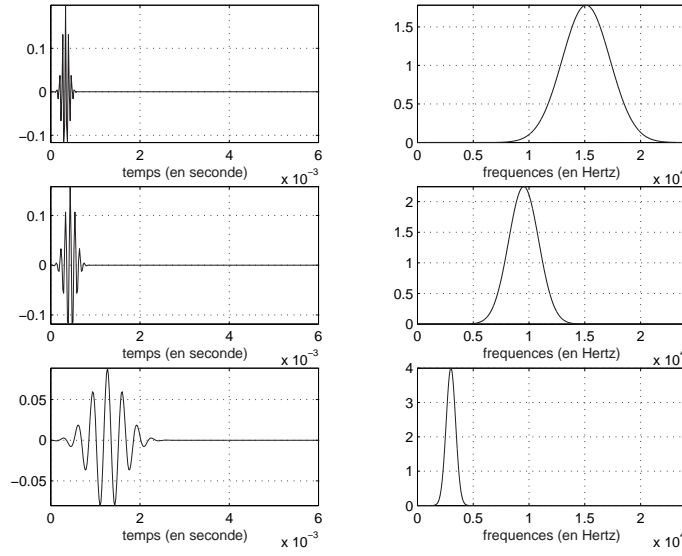


FIG. 1.3 – Représentations en temps (figures de gauche) et en fréquence (figures de droite) d'une ondelette de Morlet (dans l'expression (1.22), les valeurs du paramètre a_n correspondent aux numéros d'échelle $n = 2$, $n = 4$ et $n = 9$). La dilatation en temps de l'ondelette se traduit dans le domaine fréquentiel par une plus grande sélectivité de la fenêtre.

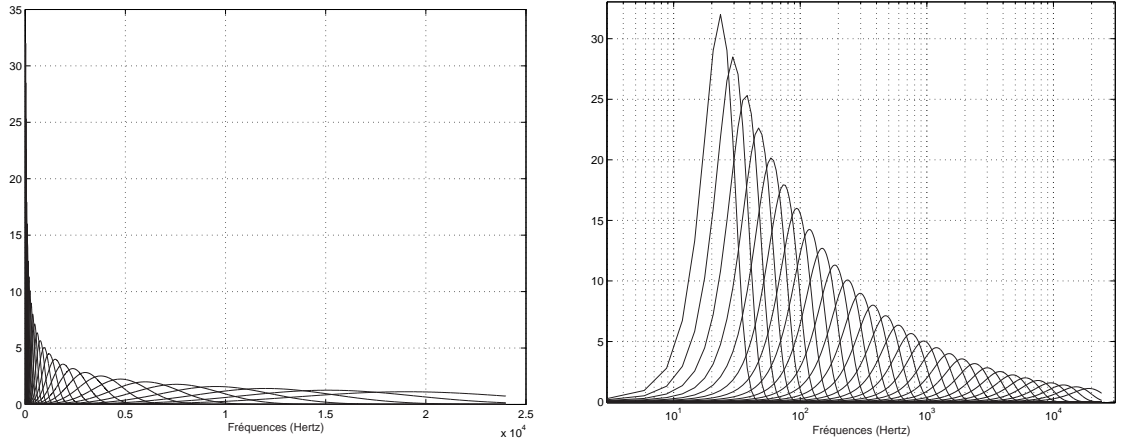


FIG. 1.4 – Modules des fenêtres d'analyse obtenues par contraction successive de l'ondelette de Morlet sur une échelle de fréquence linéaire (figure de gauche) et logarithmique (figure de droite).

manière suivante :

$$\begin{cases} \Delta f = 100 \text{ Hz} & \text{pour } f < 500 \text{ Hz} \\ \Delta f(f_0) = 25 + 75(1 + 1.4f_0^2)^{0.69} & \text{pour } f > 500 \text{ Hz} \end{cases} \quad (1.24)$$

On peut trouver dans la littérature, d'autres correspondances entre les deux échelles. La figure (1.6) illustre la correspondance entre l'échelle de Bark et celle des Hertz dans le domaine audible.

La construction d'un banc de filtres capables d'isoler le spectre du signal sur chaque intervalle de Bark s'effectue de la manière suivante. A partir de cette correspondance écrite en (1.23), il est possible de repérer les valeurs des fréquences délimitant chaque intervalle de Bark, puis de calculer les fréquences centrales correspondantes. Les fenêtres d'analyse choisies sont des gaussiennes car elles ont l'avantage de minimiser au mieux le principe d'incertitude de Gabor-Heisenberg défini en (1.7).

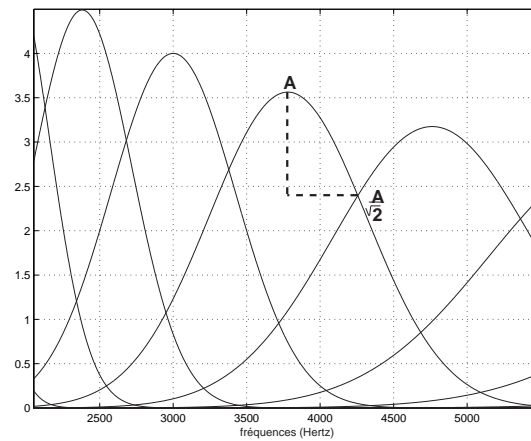


FIG. 1.5 – Agrandissement de la figure de gauche de (1.4). Deux fenêtres successives se coupent lorsque leur amplitude diminue d'un facteur $\sqrt{2}$.

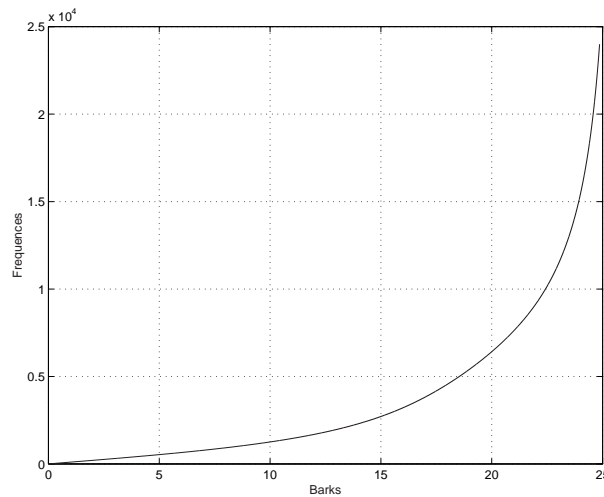


FIG. 1.6 – Courbe de correspondance entre l'échelle de Bark et celle des fréquences.

Les 25 fenêtres d'analyse sont donc centrées sur chaque intervalle de Bark et leur largeur de bande est définie de manière à ce que deux fenêtres successives se superposent lorsque l'amplitude maximale diminue d'un facteur $\sqrt{2}$, comme dans le cas de l'analyse en ondelettes en tiers d'octave. La figure (1.7) représente ces fenêtres d'analyse en fonction de la fréquence et la somme de toutes ces fenêtres. Cette somme indique une faible modulation (moins de 1 dB) exceptée pour les premiers et derniers intervalles de Bark (Bark 1 et de Bark 20 à 25). L'essentiel de l'information contenue dans le signal est donc retrouvé dans la représentation issue de cette analyse.

Présentés en fin de chapitre, des exemples de représentations temps-échelle et en échelle de Bark d'un signal transitoire (signal d'accéléromètre pour une plaque mince rectangulaire frappée en bois et en verre) sont mis en parallèle avec les représentations temps-fréquence associées aux mêmes signaux.

Le recours à une représentation temps-échelle (ou en échelle de Bark) du signal plutôt qu'à une représentation temps-fréquence réside dans le fait que la première représentation est plus adaptée à l'analyse de signaux transitoires où la fenêtre s'adapte automatiquement à l'échelle du phénomène.

Comme le montre la figure (1.8), la représentation temps-échelle (ou la représentation en

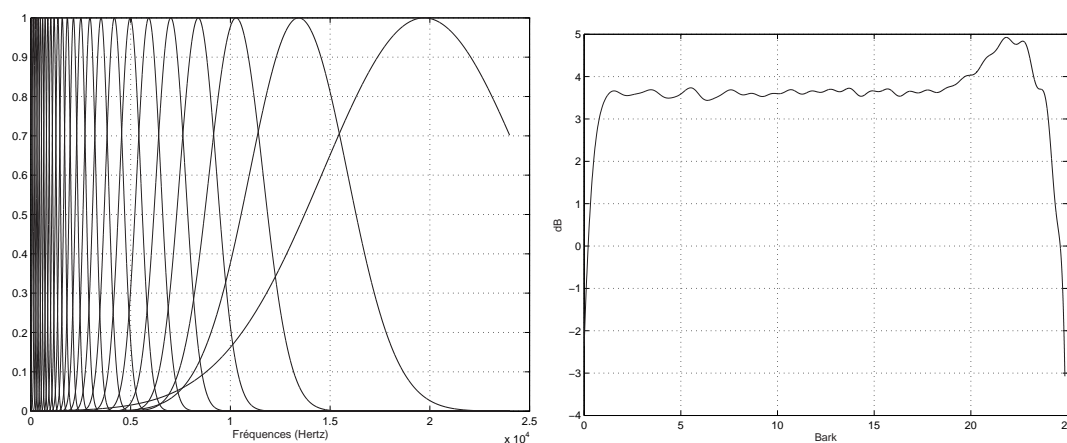


FIG. 1.7 – **Figure de gauche** : Fenêtres d'analyse permettant d'isoler le spectre du signal sur chaque intervalle de Bark en fonction de la fréquence. Ce sont des gaussiennes centrées sur la fréquence centrale de chaque intervalle de Bark. **Figure de droite** : Sommation effectuée sur tous les modules des fenêtres d'analyse en dB en fonction des Barks.

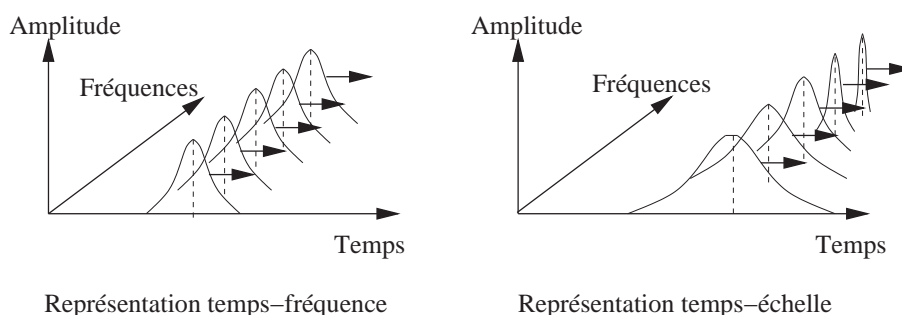


FIG. 1.8 – Enveloppes temporelles des fenêtres d'analyse pour la représentation temps-fréquence et la représentation temps-échelle (ou en échelle de Bark). Les fenêtres d'analyse sont identiques quelque soit la fréquence pour la représentation temps-fréquence. Par contre, elles diminuent en fonction de la fréquence pour la représentation temps-échelle. La représentation temps-échelle propose une meilleure résolution temporelle en hautes fréquences que la représentation temps-fréquence, ce qui la rend très adaptée à l'analyse de signaux transitoires dont l'information temporelle est importante.

échelle de Bark) qui utilise une fenêtre d'analyse adaptative en fonction de la fréquence, propose une meilleure résolution temporelle en hautes fréquences que la représentation temps-fréquence qui utilise la même fenêtre d'analyse quelle que soit la bande de fréquence considérée. La fenêtre temporelle d'analyse diminue avec la fréquence pour la représentation temps-échelle. Cette précision en temps s'effectue au détriment de la précision en fréquence mais une faible résolution fréquentielle est permise dans les hautes fréquences. En effet, un son transitoire est principalement caractérisé par sa décroissance temporelle (surtout pour les composantes hautes fréquences). Par contre, dans le cas de signaux stationnaires, l'information temporelle sur l'évolution de composantes particulières n'est pas utile.

Le choix d'une représentation temps-échelle est également justifié dans la mesure où des critères perceptifs sont pris en compte. En effet, le signal est représenté d'une manière similaire à ce que fait l'oreille humaine lorsqu'elle traite le signal.

1.4 Estimation de la loi d'amortissement moyen

A partir d'une des représentations conjointes du signal présentées dans le paragraphe précédent (représentations temps-fréquence, temps-échelle et en échelle de Bark), il est alors possible d'estimer une loi d'amortissement qui gouverne la décroissance temporelle du son. Sachant que l'estimation est effectuée à partir d'une représentation en sous-bandes, la loi d'amortissement obtenue est une caractéristique moyenne valable d'une manière globale dans chaque sous-bande. Il n'y a qu'une valeur d'amortissement pour chaque sous-bande.

Pour chacune des sous-bandes que j'indexe par n , je calcule le signal analytique $\tilde{s}_n(t)$ correspondant au signal $s_n(t)$ contenu dans la sous-bande. Par définition, le signal analytique est donné par :

$$\tilde{s}_n(t) = (1 + iH)s_n(t) \quad (1.25)$$

avec H l'opérateur de la transformée de Hilbert. Ainsi, la partie réelle de $\tilde{s}_n(t)$ est égale au signal $s_n(t)$ et sa partie imaginaire est égale à la transformée de Hilbert de $s_n(t)$ (qui correspond au signal $s_n(t)$). De manière générale, à un signal $x(t)$, on associe le signal en quadrature $y(t)$ puis on définit le signal analytique $z(t) = x(t) + iy(t)$. Ce signal complexe $z(t)$ peut être représenté dans le plan $\{x, y\}$. La courbe décrite dans ce plan lorsque t varie est appelée diagramme polaire. En pratique, le signal analytique $\tilde{s}_n(t)$ est obtenu par transformée de Fourier inverse du spectre de $s_n(t)$ lorsque sa partie négative est mise à zéro.

Je me propose d'illustrer la méthode d'estimation de la loi d'amortissement avec l'analyse d'un signal test de synthèse $s_{test}(t)$ constitué d'une somme de sinusoides exponentiellement amorties :

$$s_{test}(t) = \sum_{n=1}^N \cos(\omega_n t) e^{-\alpha(\omega_n)t} \quad \text{avec} \quad \alpha(\omega_n) = C\sqrt{\omega_n} \quad (1.26)$$

La loi d'amortissement $\alpha(\omega)$ définie en (1.26), a été fixée de manière arbitraire avec C une constante. Elle aurait également pu suivre un comportement linéaire ou bien un comportement en puissance entière de ω . Les pulsations ω_n suivent la loi suivante :

$$\omega_n = n\omega_0 \sqrt{1 + 10^{-2}n^2} \quad (1.27)$$

ce qui correspond au modèle standard d'inharmonicité d'une corde tendue, munie de raideur. La méthode d'analyse doit être capable de retrouver cette loi $\alpha(\omega)$.

Pour chaque sous-bande, l'évolution temporelle du module du signal analytique est définie en (1.26) comme une fonction exponentielle décroissante. Dans le cas de signaux réels, le module du signal analytique est également approché par une fonction exponentielle décroissante. Ceci est justifié par le fait que le système physique est en régime libre (il n'est pas entretenu par une excitation continue) et que les solutions des équations associées à ce système peuvent s'écrire sous la forme d'une somme de sinusoides exponentiellement amorties. Ceci revient à approcher par une droite le logarithme du module de ce signal analytique. La valeur de sa pente correspond au coefficient d'amortissement moyen dans cet intervalle de Bark. Cette approximation doit être effectuée sur la partie utile (non bruitée) du signal qui dépend de la sous-bande considérée.

La figure (1.9) représente l'étape d'approximation du logarithme du module du signal analytique par une droite pour deux sous-bandes de la représentation temps-fréquence du signal $s_{test}(t)$. Le coefficient d'amortissement est déduite de la pente de la droite. Cette approximation est effectuée sur la partie utile (non bruitée) du signal analytique. Le rapport signal sur bruit diminue dans les hautes fréquences, donc l'intervalle sur lequel est effectuée l'approximation diminue avec la fréquence.

La valeur de la pente de cette droite (qui est exprimée en dB) que je note p_n est reliée au coefficient d'amortissement α_n pour l'intervalle de bark n considéré par la relation suivante :

$$\alpha_n = \frac{2 \ln(10)}{T_n} \quad \text{avec} \quad T_n = \frac{dyn}{p_n} \quad (1.28)$$

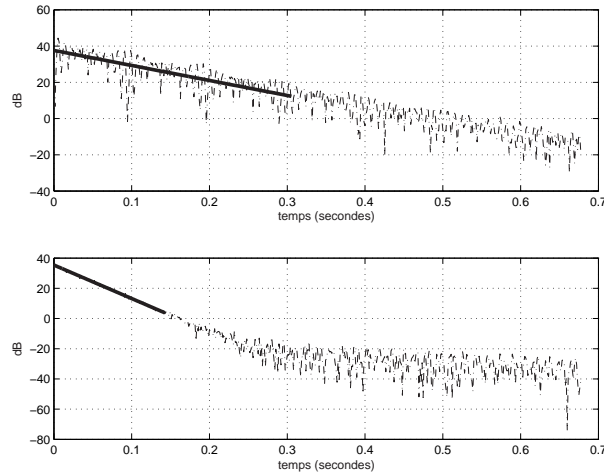


FIG. 1.9 – Interpolation par une droite (en trait plein) du logarithme du module du signal analytique (en traits pointillés) dans les sous-bandes 5 (figure du haut) et 30 (figure du bas) de la représentation temps-fréquence du signal test.

avec T_n le temps nécessaire à une décroissance de dyn dB de l'amplitude du signal temporel. La valeur de dyn est arbitraire. De manière générale, une dynamique de 40 dB est considérée comme satisfaisante pour identifier le signal utile par rapport au niveau de bruit. Je choisis donc $dyn = 40$ pour mon cas.

Les figures (1.10) montrent les résultats de la méthode d'estimation de la loi d'amortissement $\alpha(\omega)$ avec $C = 30$. Les courbes obtenues à partir des différentes représentations conjointes sont similaires.

1.5 Extraction des composantes sinusoïdales

D'après les études perceptives décrites en 1.1, la perception que l'on peut avoir de la forme géométrique d'une structure donnée s'effectue par la détection des composantes tonales contenues dans le spectre du signal. Il est alors important de pouvoir déterminer les valeurs des fréquences de ces composantes. Les méthodes sont nombreuses et peuvent être classées en deux catégories : les méthodes paramétriques et les méthodes non paramétriques. Je me propose de présenter quelques exemples de méthodes pour chacune d'elles.

1.5.1 Méthodes paramétriques

Les méthodes paramétriques imposent une connaissance à priori du signal à analyser. En supposant que le signal peut être modélisé par une expression paramétrée, le problème revient à estimer ces paramètres de manière optimale.

Méthode de Prony

La méthode de Prony suppose que le signal $s(t)$ à analyser s'identifie à une somme $\tilde{s}(t)$ de sinusoïdes exponentiellement amorties :

$$\tilde{s}(t) = \sum_{m=1}^M A_m e^{-\alpha_m t} \cos(2\pi f_m t + \phi_m) \quad (1.29)$$

et consiste à estimer les fréquences propres f_m , les coefficients d'amortissement α_m , les amplitudes A_m et les phases ϕ_m de chaque composante m [47] [48]. Le nombre de sinusoïdes M doit

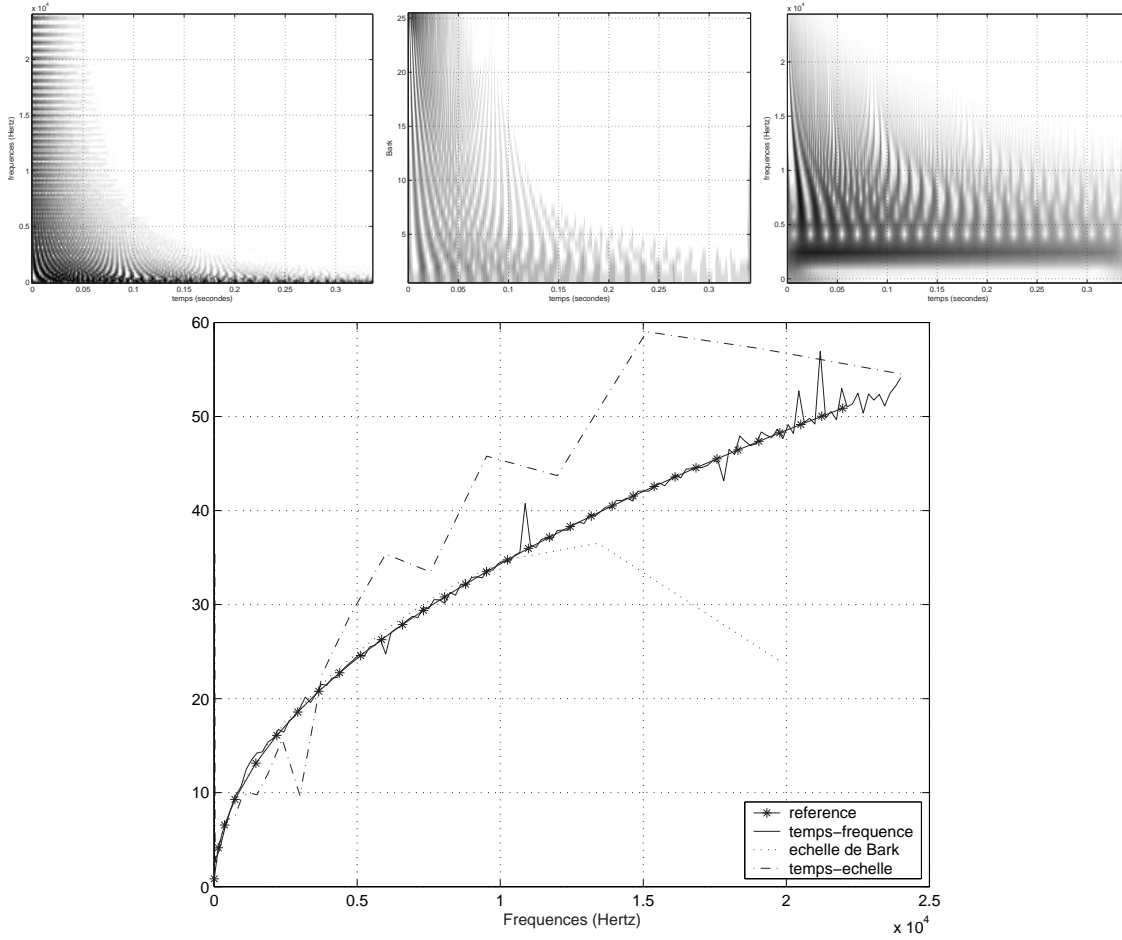


FIG. 1.10 – Lois d'amortissement estimées à partir des trois représentations bidimensionnelles présentées en haut de la figure (temps-fréquence (figure de gauche), en échelle de Bark (figure du milieu) et temps-échelle (figure de droite)). La loi d'amortissement de référence donnée en (1.26) avec $C = 30$ est représentée en trait plein étoilé.

être fixé à l'avance. Les différentes étapes de la méthode sont les suivantes.

Il faut tout d'abord définir les matrices suivantes \mathbf{X}_0 et \mathbf{X}_1 constituées des N échantillons x_n du signal :

$$\mathbf{X}_0 = \begin{pmatrix} x_{p-1} & x_{p-2} & \dots & x_0 \\ x_p & x_{p-1} & \dots & x_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{N-2} & x_{N-3} & \dots & x_{N-p-1} \end{pmatrix} ; \quad \mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} x_p & x_{p-1} & \dots & x_1 \\ x_{p+1} & x_p & \dots & x_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{N-1} & x_{N-2} & \dots & x_{N-p} \end{pmatrix}$$

avec un paramètre p qui vérifie la relation suivante $2M \leq p \leq N - 2M$. On calcule ensuite la matrice inverse \mathbf{X}_0^{-1} de la matrice \mathbf{X}_0 , tronquée au rang $2M$. La détermination des valeurs propres de la matrice $\mathbf{X}_0^{-1}\mathbf{X}_1$ donne $2M$ valeurs non nulles et $p - 2M$ valeurs nulles. A partir des M valeurs non nulles ayant une partie imaginaire positive, que je note $\lambda_{m=1,\dots,M}$, on peut en déduire les fréquences et les coefficients d'amortissement des M sinusoïdes :

$$\begin{cases} f_m = \frac{\arg(\lambda_m)}{2\pi} \\ \alpha_m = -\log(|\lambda_m|) \end{cases} \quad (1.30)$$

Cette méthode permet également de déterminer les amplitudes et les phases des M sinusoïdes. Leur détermination suppose la connaissance des fréquences et des coefficients d'amortissement précédemment calculés et s'effectue en minimisant l'erreur quadratique entre le signal original $s(t)$ et le signal de synthèse $\tilde{s}(t)$ constitué des M sinusoïdes. Les valeurs initiales des amplitudes et phases sont données par :

$$\begin{cases} A_m = \sqrt{a_m^2 + b_m^2} \\ \tan \phi_m = \frac{b_m}{a_m} \end{cases} \quad (1.31)$$

Les paramètres a_m et b_m définissent un vecteur \mathbf{A} tel que :

$$\mathbf{A} = (a_1, b_1, \dots, a_M, b_M)^t \quad (1.32)$$

où la notation t signifie la matrice transposée. Le vecteur \mathbf{A} est défini par :

$$\mathbf{A} = (\mathbf{T}^h \mathbf{T})^{-1} \mathbf{T}^h \mathbf{x} \quad (1.33)$$

où la notation h signifie que la matrice transposée conjuguée de \mathbf{T} et :

$$\mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots, x_M)^t ; \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \eta_1 & \beta_1 & \eta_2 & \beta_2 & \dots & \eta_M & \beta_M \\ \eta_1^2 & \beta_1^2 & \eta_2^2 & \beta_2^2 & \dots & \eta_M^2 & \beta_M^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \eta_1^L & \beta_1^L & \eta_2^L & \beta_2^L & \dots & \eta_M^L & \beta_M^L \end{pmatrix}$$

La grandeur L correspond à la longueur du signal sur laquelle est effectuée la minimisation et les composantes η_m^ℓ et β_m^ℓ de la matrice \mathbf{T} sont définies de la manière suivante :

$$\begin{cases} \eta_m^\ell = e^{-\ell \alpha_m} \cos(2i\pi \ell f_m) \\ \beta_m^\ell = e^{-\ell \alpha_m} \sin(2i\pi \ell f_m) \end{cases} \quad (1.34)$$

Ainsi, les amplitudes et les phases sont déterminées en minimisant la différence quadratique $\sum_{\ell=1}^L (s(\ell) - \tilde{s}(\ell))^2$.

Les résultats obtenus avec cette méthode dépend du nombre de sinusoïdes qu'il faut fixer au départ ainsi que du nombre d'échantillons sur lequel est effectuée l'estimation.

Méthode de Steiglitz-Mac Bride

Cette méthode consiste à considérer le signal à analyser comme la réponse impulsionnelle d'un filtre à réponse impulsionnelle infinie (IIR). La méthode consiste à identifier les coefficients de ce filtre et à déterminer les grandeurs physiques (fréquences propres, amplitudes, coefficients d'amortissement) à partir des valeurs de ces coefficients [63]. La transformée en z de ce filtre s'écrit :

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b(1) + b(2)z^{-1} + \dots + b(n_b + 1)z^{-n_b}}{1 + a(2)z^{-1} + \dots + a(n_a + 1)z^{-n_a}} \quad (1.35)$$

Ce filtre comporte n_a pôles et n_b zéros. Les coefficients sont estimés en minimisant l'erreur quadratique entre le signal à analyser et la réponse impulsionnelle du filtre par la méthode des moindres carrés.

La méthode d'estimation est par ailleurs très adaptée lorsque deux composantes sont de fréquences voisines. Par exemple, dans un son de piano, il est commun de voir des doubles résonances dans le spectre. Ces doubles résonances sont dues aux phénomènes de couplage entre les cordes via le chevalet [67]. La figure du haut de (1.11) représente le spectre d'un son de piano (pour la

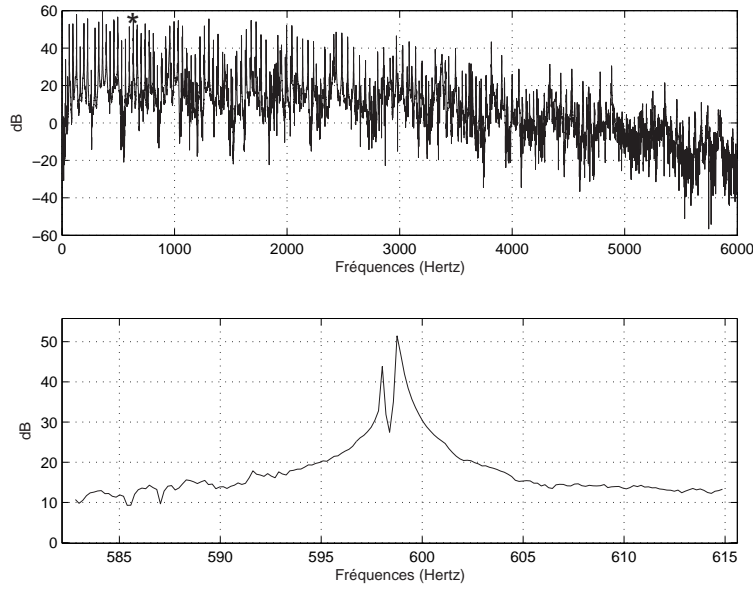


FIG. 1.11 – **Figure du haut :** Module du spectre d'un son de piano (note C1). **Figure du bas :** Double résonance isolée du spectre par fenêtrage. Elle est marquée par un astérisque (*) sur le spectre global.

note C1) tandis que la figure du bas représente la double résonance indiquée par un astérisque (*) qui a été isolée du spectre total.

La méthode de Steiglitz-Mac Bride permet de déterminer les paramètres de cette double résonance même si les deux composantes qui la constituent sont très proches dans le domaine fréquentiel. En supposant que le signal temporel correspondant à ce doublet s'écrit :

$$s(t) = ae^{-\gamma_1 t} + be^{-\gamma_2 t} \quad (1.36)$$

avec :

$$\begin{cases} \gamma_1 = \alpha - i\omega_1 \\ \gamma_2 = \beta - i\omega_2 \end{cases} \quad (1.37)$$

Les fréquences propres ω_1 et ω_2 , les coefficients d'amortissement α et β , et les amplitudes a et b des deux composantes sinusoïdales formant la double résonance que l'on a isolées peuvent être estimés par cette méthode. La transformée en z du signal $s(t)$ est définie par :

$$\begin{aligned} \tilde{H}(z) &= a \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\gamma_1 n} z^{-n} + b \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\gamma_2 n} z^{-n} \\ &= a \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-\gamma_1} z^{-1})^n + b \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-\gamma_2} z^{-1})^n \end{aligned}$$

et s'écrit au final :

$$\tilde{H}(z) = \frac{a}{1 - e^{-\gamma_1} z^{-1}} + \frac{b}{1 - e^{-\gamma_2} z^{-1}} \quad (1.38)$$

On cherche alors à modéliser $\tilde{H}(z)$ par un filtre IIR comportant deux pôles et un zéro. La relation (1.35) est donc réduite à :

$$H(z) = \frac{c(1) + c(2)z^{-1}}{c(3) + c(4)z^{-1} + c(5)z^{-2}} \quad (1.39)$$

En égalisant les relations (1.39) et (1.38) suivant les puissances de z , on peut écrire les égalités suivantes, en posant $X_1 = e^{-\gamma_1}$ et $X_2 = e^{-\gamma_2}$:

$$\begin{cases} c(1) = a + b \\ c(2) = -(aX_2 + bX_1) \\ c(4) = -(X_1 + X_2) \\ c(5) = X_1X_2 \end{cases} \quad (1.40)$$

On en déduit :

$$X_1 = \frac{-c(4) + \sqrt{c(4)^2 - 4c(5)}}{2} ; \quad X_2 = -c(4) - X_1 \quad (1.41)$$

On peut enfin déterminer les fréquences propres et les coefficients d'amortissement en fonction des expressions de X_1 et X_2 :

$$\begin{cases} \omega_1 = \text{Im}\{\log(X_1)\} \\ \alpha = -\text{Re}\{\log(X_1)\} \\ a = \frac{c(2) + c(1)X_1}{X_1 - X_2} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \omega_2 = \text{Im}\{\log(X_2)\} \\ \beta = -\text{Re}\{\log(X_2)\} \\ b = c(1) - a \end{cases} \quad (1.42)$$

Les résultats de l'estimation de la double résonance que l'on a isolée du spectre du son de piano est présenté sur la figure (1.12).

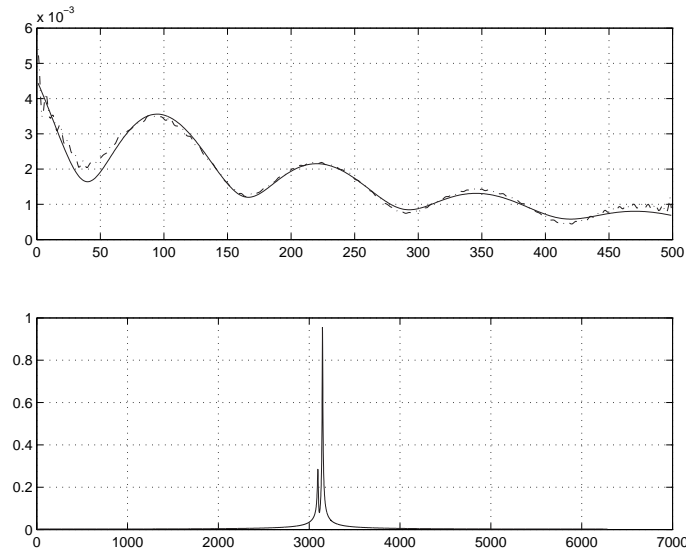


FIG. 1.12 – **Figure du haut** : Signal temporel (en traits pointillés) correspondant au doublet qui a été isolé du spectre. Ce signal est approché par la réponse impulsionnelle (en trait plein) d'un filtre IIR comportant 2 pôles et 1 zéro. **Figure du bas** : Double résonance reconstruite à partir des coefficients du filtre IIR estimé. Dans les deux cas, les échelles d'axes sont arbitraires.

Cette méthode d'estimation a été utilisée dans le cadre d'une étude plus générale sur la synthèse des sons de piano. En particulier, le modèle qui a été mis en œuvre pour simuler le phénomène de couplage entre deux cordes a été calé par l'analyse de sons réels de piano. Cette étude a fait l'objet d'un article qui est consultable en annexe C de ce document.

1.5.2 Méthodes non paramétriques

Ces méthodes utilisent pour la plupart la transformée de Fourier. Les signaux considérés étant échantillonnés, les fréquences estimées à partir du module de la transformée de Fourier

ne sont généralement déterminées qu'à une certaine précision $\pm \Delta f$. La figure (1.13) représente un exemple de détection des composantes sinusoïdales à partir du module de la transformée de Fourier calculée sur toute la longueur du signal.

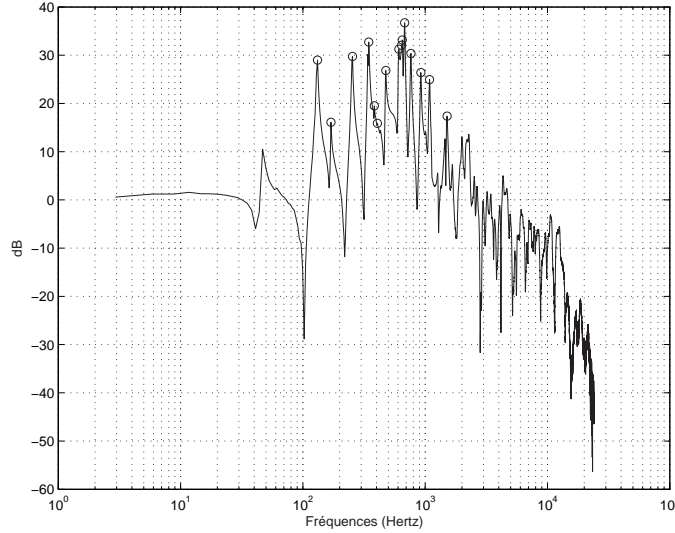


FIG. 1.13 – *Module du spectre d'un son impulsif (signal d'accéléromètre obtenue sur une plaque mince rectangulaire frappée en contre-plaqué sollicitée en flexion) en dB en fonction des fréquences (échelle logarithmique). Estimation des fréquences de chaque composante sinusoïdale à partir du module de la transformée de Fourier calculée sur toute la longueur du signal. Dans cet exemple, 15 composantes sinusoïdales sont repérées par des (o).*

La finesse d'analyse Δf est définie par le rapport :

$$\Delta f = \frac{f_e}{N} \quad (1.43)$$

où f_e est la fréquence d'échantillonnage et N le nombre d'échantillons sur lequel est calculée la transformée de Fourier.

Afin d'augmenter la précision, une autre méthode d'estimation des fréquences propres est possible. Elles sont obtenues à partir des fréquences instantanées obtenues par la dérivée de la phase de la représentation conjointe du signal.

Par exemple, si l'on considère une sinusoïde définie par :

$$s(t) = \cos(\omega_0 t) \quad (1.44)$$

et sa transformée de Fourier :

$$\hat{s}(\omega) = \frac{1}{2}(\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)) \quad (1.45)$$

En utilisant la relation (1.10), les coefficients de la représentation temps-échelle sont définies par :

$$S(b, a) = \frac{1}{2\pi} \int \hat{s}(\omega) \hat{g}_{(b, a)}(\omega) d\omega \quad (1.46)$$

$$= \frac{\sqrt{a}}{4\pi} \left(\hat{g}(a\omega_0) e^{i\omega_0 b} + \hat{g}(-a\omega_0) e^{-i\omega_0 b} \right) \quad (1.47)$$

Si la fonction d'analyse $g(t)$ est choisie symétrique alors $\hat{g}(\omega)$ est réelle et $\hat{g}(-a\omega_0)$ est nulle. Alors :

$$S(b, a) = \frac{\sqrt{a}}{4\pi} \hat{g}(a\omega_0) e^{i\omega_0 b} \quad (1.48)$$

Dans ce cas :

$$\begin{cases} |S(b,a)| = \frac{\sqrt{a}}{4\pi} \hat{g}(a\omega_0) , & \forall b \\ \arg\{S(b,a)\} = \Phi(b,a) = \omega_0 b \end{cases} \quad (1.49)$$

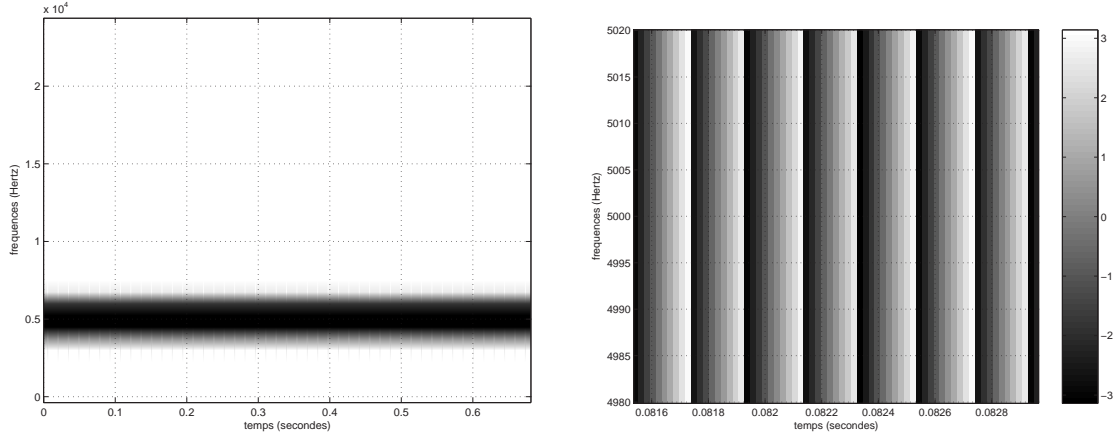


FIG. 1.14 – Module (figure de gauche) et phase (figure de droite) de la représentation temps-fréquence d'une sinusoïde à 5000 Hz pour $N = 2^{14}$ échantillons. La phase n'est pas déroulée et sa valeur est comprise entre $-\pi$ et $+\pi$. La transformée de Fourier à court terme est calculée sur 64 échantillons avec 99 % de recouvrement entre deux fenêtres d'analyse successives. La fenêtre d'analyse utilisée est une gaussienne.

La pulsation propre de la sinusoïde est directement définie par :

$$\omega_0 = \frac{\partial \Phi(b,a)}{\partial b} \quad (1.50)$$

Cette valeur est obtenue quelque soit la fenêtre d'analyse $g(t)$ choisie, à condition que sa transformée de Fourier soit réelle.

La figure (1.14) représente le module et la phase de la représentation temps-fréquence d'une sinusoïde à 5000 Hz pour $N = 2^{14}$ échantillons. La transformée de Fourier à court terme est calculée sur 64 échantillons avec 99 % de recouvrement entre deux fenêtres d'analyse successives. La fenêtre d'analyse utilisée est une gaussienne.

1.6 Applications : lois d'amortissement expérimentales

1.6.1 Dispositif expérimental

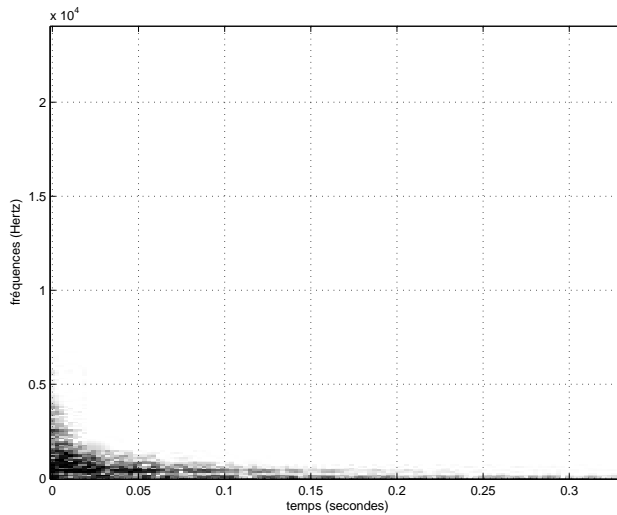
Afin d'appliquer les méthodes d'estimation décrites dans ce chapitre et de pouvoir déterminer expérimentalement des lois d'amortissement, des mesures expérimentales ont été effectuées sur des plaques minces rectangulaires de différents types de matériaux : bois, fer et verre. Chaque plaque a été suspendue en deux points et excitée par un marteau-force en différents points de la structure. Les vibrations transversales ont été mesurées avec un petit accéléromètre qui a été fixé en un point de la structure. Les détails du matériel de mesures utilisé est présenté dans l'annexe **B**.

A partir de ces mesures expérimentales, une loi d'amortissement propre à chaque matériau a pu être déterminée en effectuant une moyenne arithmétique sur les courbes d'amortissement obtenues pour un ensemble de signaux propre à un matériau donné.

Dans un premier temps, des exemples de représentations conjointes (représentations temps-fréquence, en échelle de Bark et temps-échelle) des signaux expérimentaux seront présentés. Puis, les lois d'amortissement qui ont été estimées des trois représentations seront présentées.

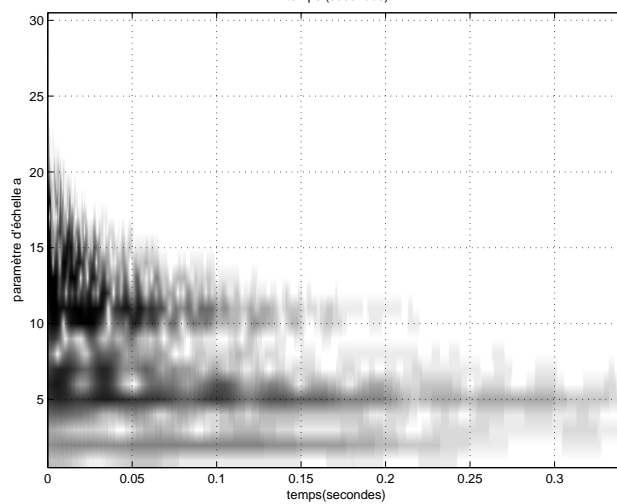
1.6.2 Exemples de représentations conjointes

Matériau bois :

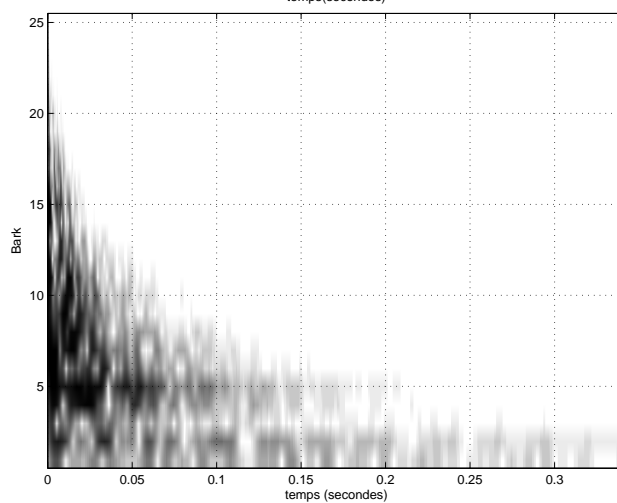


Représentation temps-fréquence

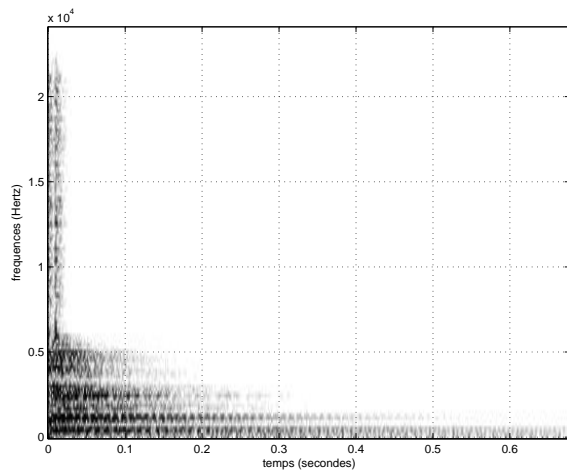
La représentation temps-fréquence est obtenue par transformée de Fourier à court terme avec une fenêtre de Hamming de longueur égale à 512 échantillons avec 75 % de recouvrement.



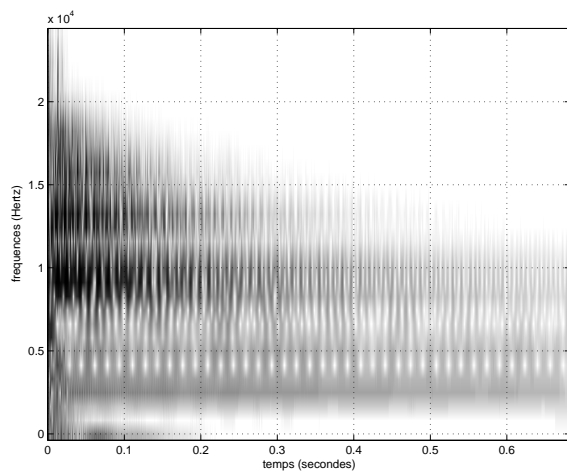
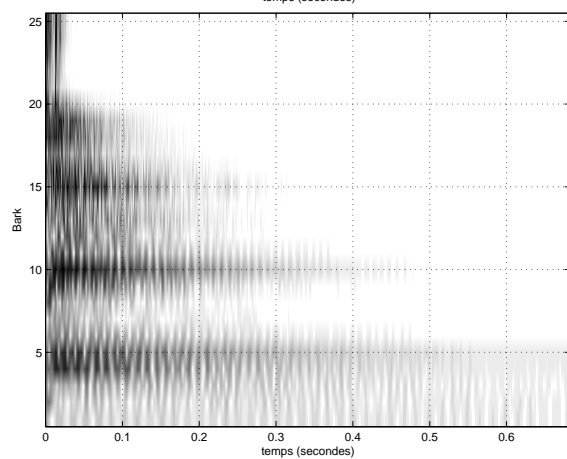
Représentation temps-échelle



Représentation en échelle de bark

Matériau verre :**Représentation temps-fréquence**

La représentation temps-fréquence est obtenue par transformée de Fourier à court terme avec une fenêtre de Hamming de longueur égale à 512 échantillons avec 75 % de recouvrement.

**Représentation temps-échelle****Représentation en échelle de bark**

1.6.3 Résultats d'estimation des lois d'amortissement

Matériau bois :

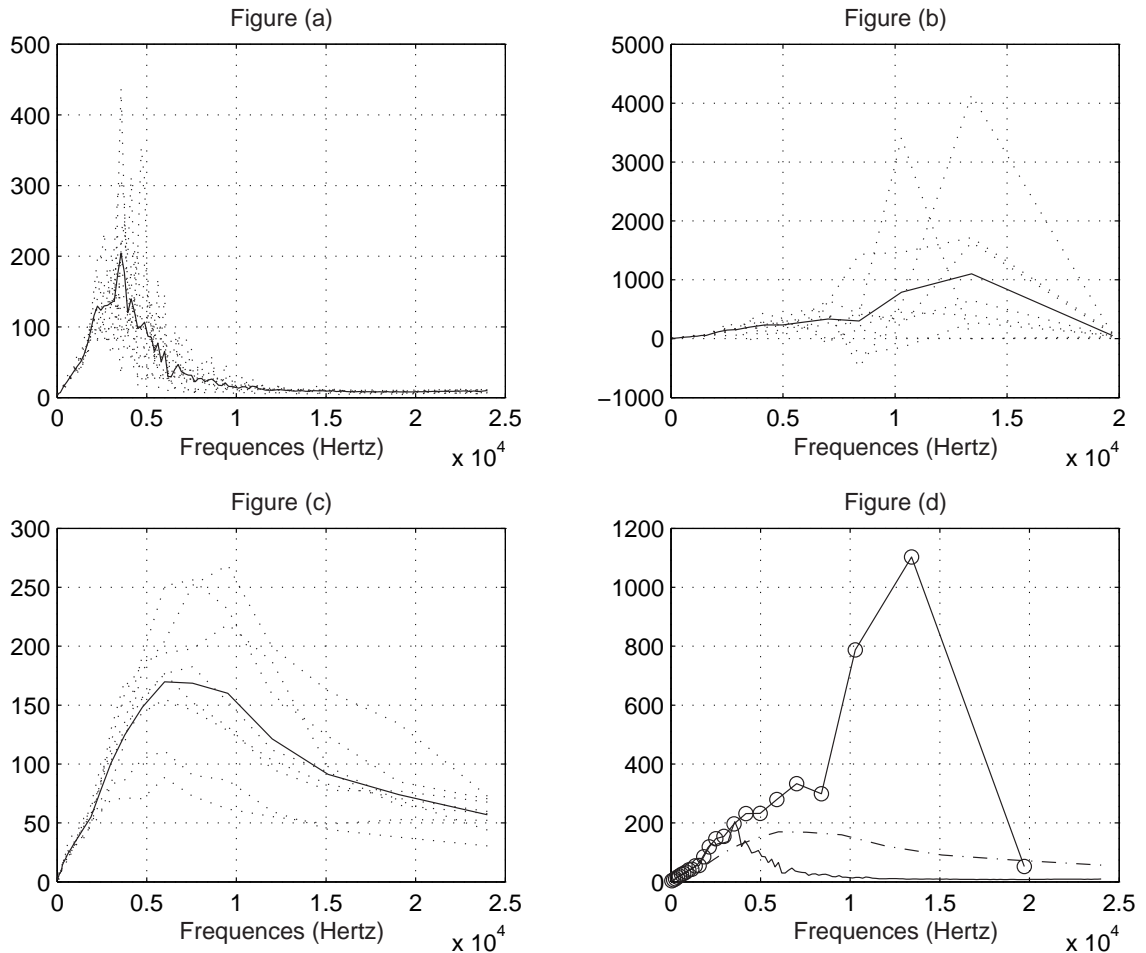


FIG. 1.15 – Estimation de la loi d'amortissement pour le matériau bois. **Figure (a)** : à partir de la représentation temps-fréquence ; **Figure (b)** : à partir de la représentation en échelle de Bark ; **Figure (c)** : à partir de la représentation temps-échelle. Les courbes en traits pointillés (...) correspondent à l'analyse de l'ensemble des signaux expérimentaux obtenus pour ce matériau. La loi d'amortissement caractéristique du matériau est définie en moyennant ces courbes. Elle est représentée en trait plein. **Figure (d)** : Lois d'amortissement obtenues à partir des trois représentations : temps-fréquence (en trait plein), en échelle de Bark (en trait plein avec rond) et temps-échelle (en traits pointillés).

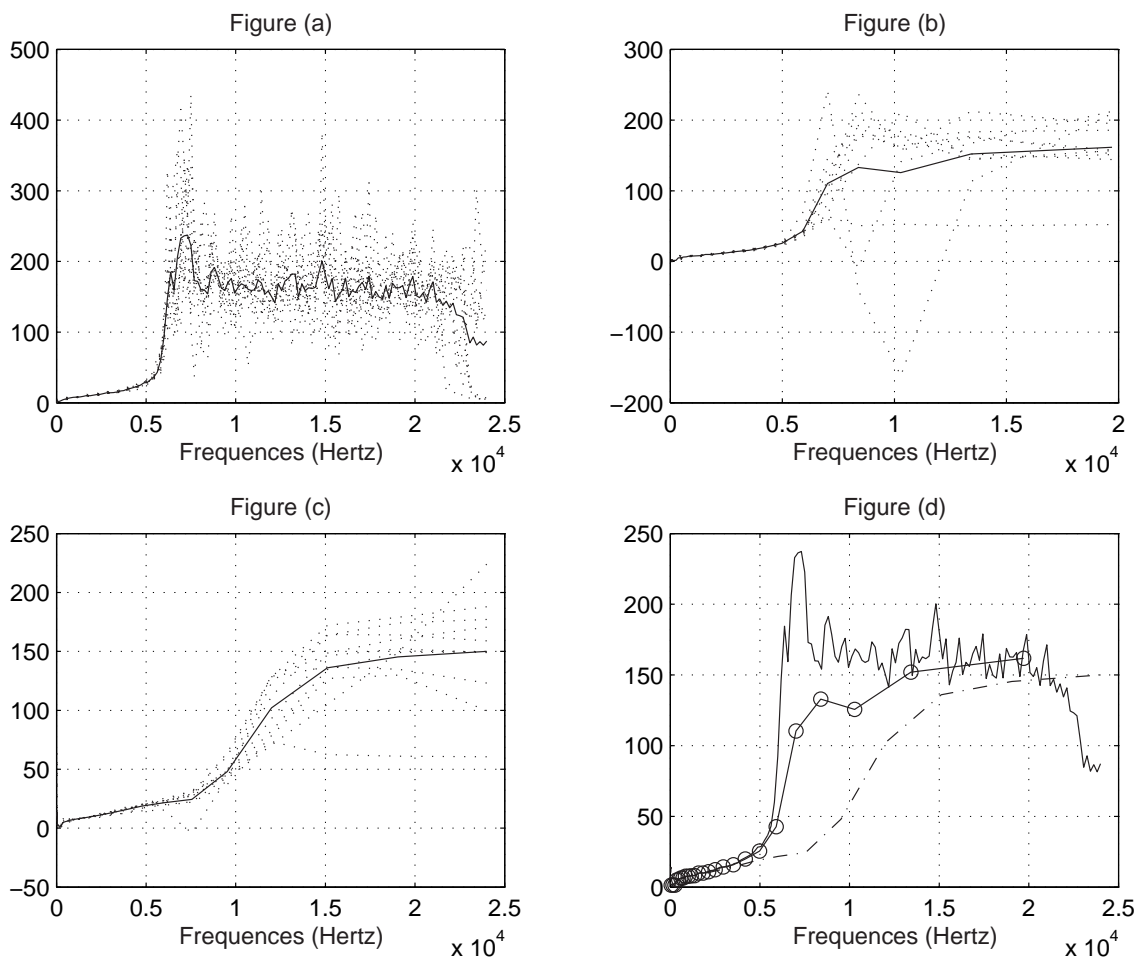
Matériau verre :

FIG. 1.16 – Estimation de la loi d'amortissement pour le matériau verre. **Figure (a)** : à partir de la représentation temps-fréquence ; **Figure (b)** : à partir de la représentation en échelle de Bark ; **Figure (c)** : à partir de la représentation temps-échelle. Les courbes en traits pointillés (...) correspondent à l'analyse de l'ensemble des signaux expérimentaux obtenus pour ce matériau. La loi d'amortissement caractéristique du matériau est définie en moyennant ces courbes. Elle est représentée en trait plein. **Figure (d)** : Lois d'amortissement obtenues à partir des trois représentations : temps-fréquence (en trait plein), en échelle de Bark (en trait plein avec rond) et temps-échelle (en traits pointillés).

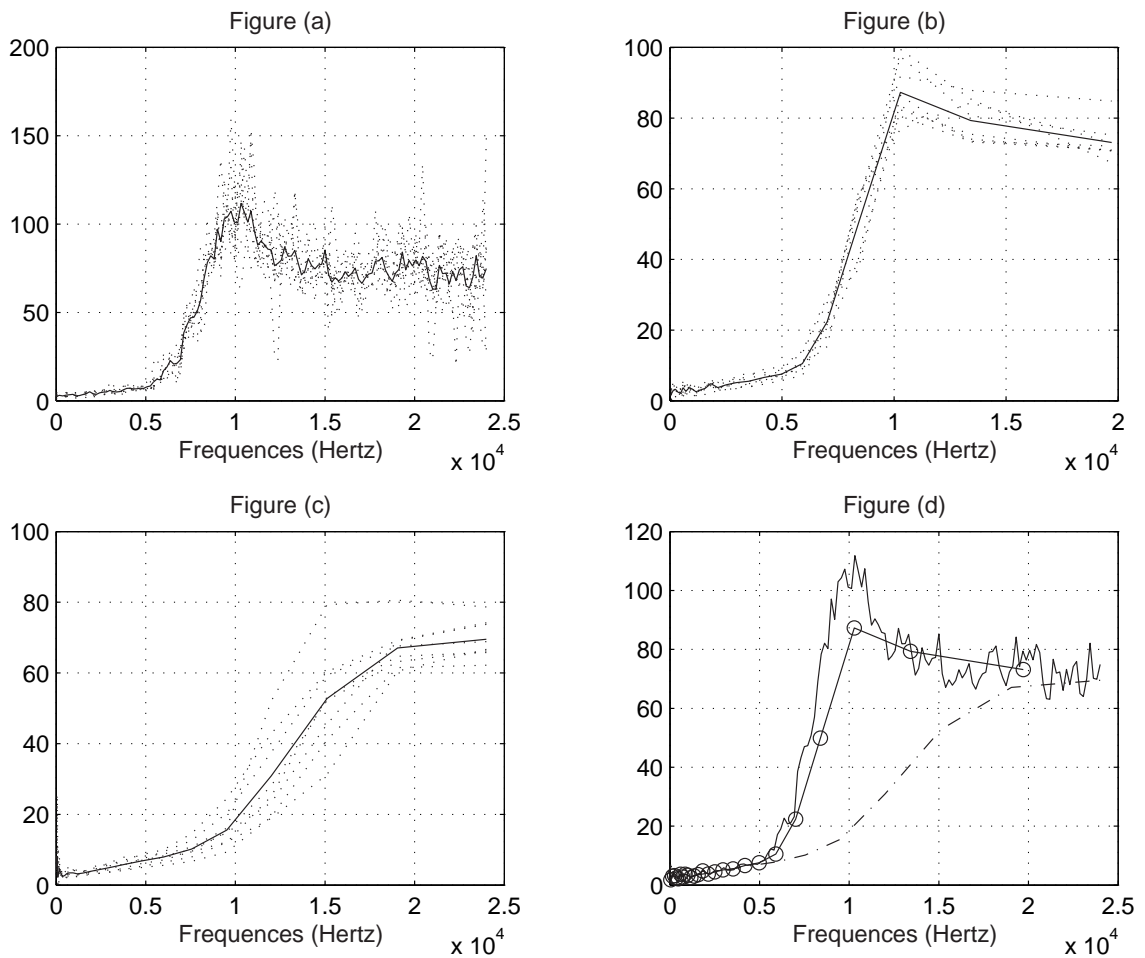
Matériau fer :

FIG. 1.17 – Estimation de la loi d'amortissement pour le matériau fer. **Figure (a)** : à partir de la représentation temps-fréquence ; **Figure (b)** : à partir de la représentation en échelle de Bark ; **Figure (c)** : à partir de la représentation temps-échelle. Les courbes en traits pointillés (...) correspondent à l'analyse de l'ensemble des signaux expérimentaux obtenus pour ce matériau. La loi d'amortissement caractéristique du matériau est définie en moyennant ces courbes. Elle est représentée en trait plein. **Figure (d)** : Lois d'amortissement obtenues à partir des trois représentations : temps-fréquence (en trait plein), en échelle de Bark (en trait plein avec rond) et temps-échelle (en traits pointillés).

1.6.4 Conclusions

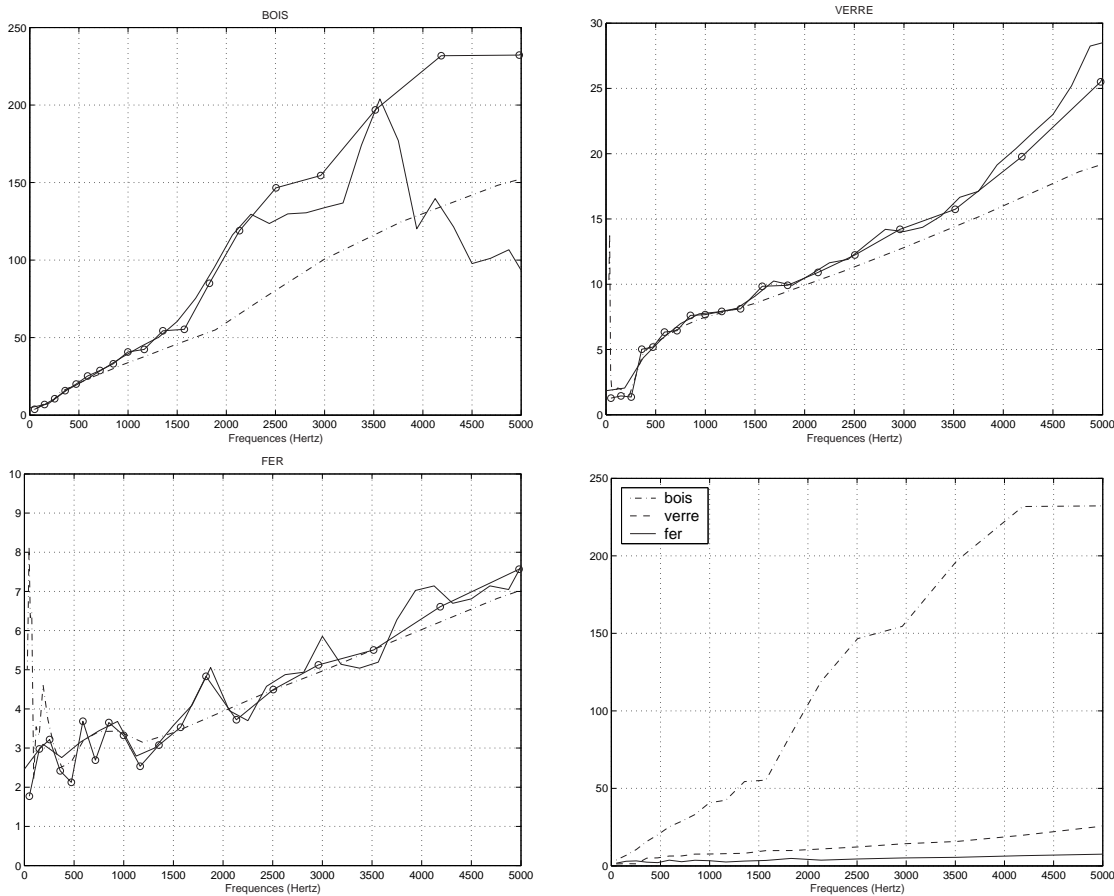


FIG. 1.18 – Agrandissement des figures (d) pour les basses fréquences pour les trois matériaux : bois, verre et fer. La quatrième figure (en bas à droite) superpose les trois lois d'amortissement.

La figure (1.18) permet de comparer les lois d'amortissement moyen obtenues pour les matériaux bois, verre et fer. Ces lois expérimentales obtenues à partir des trois représentations sont semblables jusqu'à environ 5000 Hz (même moins que 5000 Hz pour le matériau bois). Au-delà de cette fréquence, les courbes ne se superposent plus. Ceci est essentiellement dû au fait qu'il n'y a plus de contribution énergétique des hautes fréquences dans le signal expérimental. La figure (1.18) représente les lois d'amortissement jusqu'à environ 5000 Hz . Au-delà, les valeurs d'amortissement ne sont plus significatives. La comparaison entre les lois d'amortissement permet de déduire que l'amortissement est plus important dans le bois que dans le verre ou dans le fer, ce qui est validé d'un point de vue perceptif. Le son produit par une structure en bois est beaucoup plus court que celui produit par une structure en verre ou en fer.

Ces lois sont difficilement comparables aux lois théoriques dans la mesure où les caractéristiques des matériaux employés n'ont pas pu être connues. De toute manière, ces lois n'ont pas pour but de décrire les comportements mécaniques qui se produisent dans la matière mais sont destinées à la synthèse sonore. En particulier, ces lois permettent de prendre en compte des caractéristiques perceptives et de simuler des sonorités plutôt métalliques ou boisées que l'on peut retrouver dans un son naturel.

Les lois d'amortissement moyen expérimentales ne correspondent pas directement à des gran-

deurs physiques intrinsèques au matériau. Si l'on veut retrouver ces grandeurs physiques, il faut en réalité considérer le rapport entre les valeurs expérimentales du coefficient d'amortissement et les fréquences propres associées. Ceci rejoint la définition du coefficient de friction interne écrite en (1.1) caractéristique de la nature du matériau et qui est obtenue en divisant le coefficient d'amortissement (homogène à l'inverse du temps d'amortissement) par la fréquence considérée. Ce rapport permet de faire abstraction de la forme géométrique de la structure.

Conclusions sur ce chapitre

Dans ce chapitre, les principales caractéristiques physiques d'un son impulsif qui sont importantes pour sa perception ont été définies sur la base de résultats de tests psychoacoustiques. En particulier, il est possible de déterminer le fait que la loi d'amortissement permet de percevoir la nature du matériau et les fréquences contenues dans le son permet de percevoir la forme géométrique de la structure.

Dans le contexte d'analyse-synthèse, ces caractéristiques physiques sont estimées de l'analyse du signal. Pour cela, il est nécessaire d'avoir une représentation du signal qui soit la mieux adaptée à ce que l'on veut extraire. En particulier, il est important de pouvoir estimer de l'analyse une loi d'amortissement et les paramètres des modes émergents (fréquences propres, amplitudes). Si l'on veut obtenir le maximum d'information sur l'aspect transitoire pour la détermination de l'amortissement, il est important d'avoir une grande précision temporelle. Par ailleurs, il est également important de pouvoir estimer le contenu fréquentiel du signal pour la détermination des modes principaux. Partant de ces considérations, une représentation conjointe dépendante du temps et de la fréquence est apparue comme celle qui était la plus adaptée. Les représentations conjointes existantes sont nombreuses. La prise en compte de critères perceptifs ont guidé mon choix sur des représentations spécifiques : les représentations temps-échelle et en échelle de Bark. Différentes méthodes d'analyse du signal à partir de ces représentations permettant d'extraire les lois d'amortissement et les paramètres modaux ont ensuite été présentées. Enfin, des résultats d'estimation de lois d'amortissement moyen expérimentales pour les matériaux bois, verre et fer sont présentés.

Chapitre 2

Cas d'une structure unidimensionnelle de type poutre

Ce chapitre traite de méthodes de simulation de sons impulsifs produits par des structures unidimensionnelles de type poutre. Dans la mesure où les structures que je considère sont simples, les méthodes de synthèse que je présente dans ce chapitre sont basées sur une modélisation physique de la structure qui a produit le son. Nous verrons entre autres que les paramètres du modèle de synthèse peuvent être déterminés à partir de grandeurs physiques qui sont caractéristiques de la structure.

Dans un premier temps, je me propose d'étudier un modèle mécanique d'une structure unidimensionnelle de type poutre, et de déterminer analytiquement les solutions de l'équation du mouvement sous certaines conditions aux limites simples. A partir de ces solutions analytiques, je construirai ensuite le modèle de synthèse correspondant. Enfin, après avoir proposé plusieurs possibilités d'extension du modèle, je validerai expérimentalement l'un d'entre eux.

2.1 Modèle mécanique d'une structure homogène

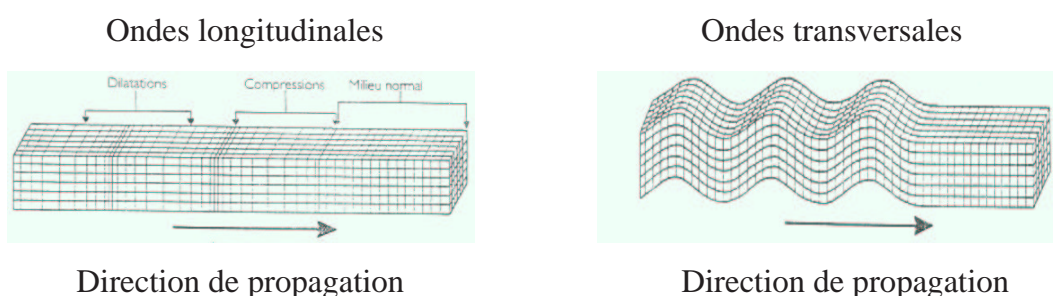


FIG. 2.1 – Déformations locales subies par la propagation d'une onde acoustique dans le cas d'ondes longitudinales (figure de gauche) et d'ondes transversales (figure de droite). Dans les deux cas, le phénomène de propagation résulte d'une succession de compression et de dilatation locales du milieu.

Dans un milieu unidimensionnel, deux catégories principales d'ondes peuvent se propager : les ondes longitudinales et les ondes transversales. Ces deux types d'ondes sont représentées sur la figure (2.1). Lorsque le sens de déplacement local du milieu lié à la déformation est parallèle à la direction de propagation, on parle d'ondes longitudinales. Par contre, lorsque le déplacement est perpendiculaire à la direction de propagation, on parle d'ondes transversales.

Je me propose maintenant de présenter successivement la propagation de ces deux catégories

d'ondes dans le cas d'une poutre de longueur L , de masse volumique ρ , de section perpendiculaire à la propagation S , de moment quadratique I et de module d'Young E .

2.1.1 Ondes longitudinales

On les appelle également ondes de compression. Le déplacement longitudinal $u(x,t)$ au point x et à l'instant t d'une poutre est régi par l'équation du mouvement suivante :

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad \text{avec} \quad c_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (2.1)$$

On cherche la solution de cette équation sous la forme d'une somme de sinusoïdes :

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(x) (A_n \sin \omega_n t + B_n \cos \omega_n t) \quad (2.2)$$

Les fonctions $U_n(x)$ représentant les modes propres de vibration de la poutre s'écrivent :

$$U_n(x,t) = C_n \sin \beta_n x + D_n \cos \beta_n x \quad (2.3)$$

Les coefficients C_n et D_n ainsi que β_n dépendent des conditions aux limites de la poutre. Par exemple, pour une poutre dont les deux extrémités sont libres, on écrit :

$$C_n = 0 \quad ; \quad D_n = 1 \quad ; \quad \beta_n = \frac{n\pi}{L} \quad (2.4)$$

Connaissant β_n et les valeurs des coefficients C_n et D_n , on remplace l'expression de $u(x,t)$ dans l'équation (2.1) et on obtient celle des pulsations propres :

$$\omega_n = \frac{n\pi c_0}{L} \quad (2.5)$$

2.1.2 Ondes transversales

On les appelle également ondes de cisaillement. L'équation du mouvement pour un déplacement transversal $y(x,t)$ donné par la relation de Bernoulli et s'écrit :

$$\frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad \text{avec} \quad a = \sqrt{\frac{EI}{\rho S}} \quad (2.6)$$

La solution générale est déterminée par la méthode de séparation de variables, en posant $y(x,t) = X(x)T(t)$ avec :

$$\begin{cases} X(x) = C_1 \sin(\beta x) + C_2 \cos(\beta x) + C_3 \sinh(\beta x) + C_4 \cosh(\beta x) \\ T(t) = C_5 \sin(\omega t) + C_6 \cos(\omega t) \end{cases} \quad (2.7)$$

Les coefficients C_k avec $k = 1, \dots, 6$ sont déterminés en fonction des conditions aux limites de la poutre. En remplaçant l'expression de $y(x,t)$ dans l'équation du mouvement, on obtient :

$$\beta^4 = \frac{\omega^2}{a^2} \quad (2.8)$$

Pour une poutre dont les deux extrémités sont libres, l'expression des pulsations propres de vibration est donc :

$$\omega_n = \frac{a}{L^2} \sqrt{X_n} \quad \text{avec} \quad X_n^{1/4} = (2n+1) \frac{\pi}{2} \quad (2.9)$$

2.2 Construction d'un modèle de synthèse

Le comportement vibratoire d'une structure unidimensionnelle de type poutre peut être simulé par un modèle guide d'onde numérique unidimensionnel [59]. Ce modèle est particulièrement adapté à la simulation de propagation d'ondes dans un milieu unidimensionnel borné. Pour un milieu sans pertes, le déplacement transversal $y(x,t)$ au point x et à l'instant t peut se décomposer en une somme de deux ondes propagatives, l'une progressive et l'autre régressive, tel qu'il s'écrit :

$$y(x,t) = y^+(x - ct) + y^-(x + ct) \quad (2.10)$$

où c correspond à la vitesse (de compression ou de flexion suivant les cas) des ondes dans le milieu. Le modèle guide d'onde correspondant va donc simuler ces deux types d'ondes propagatives. Comme nous allons le voir, la propagation est simulée par un ensemble de lignes à retard, de filtres numériques et parfois d'éléments non linéaires. Par exemple, dans le cas (2.10), les ondes propagatives peuvent être simulées simplement par une ligne à retard correspondant aux temps de propagation des ondes avec une vitesse c . Dans un cas plus général, les phénomènes de pertes sont pris en compte par un filtre de gain dépendant de la fréquence.

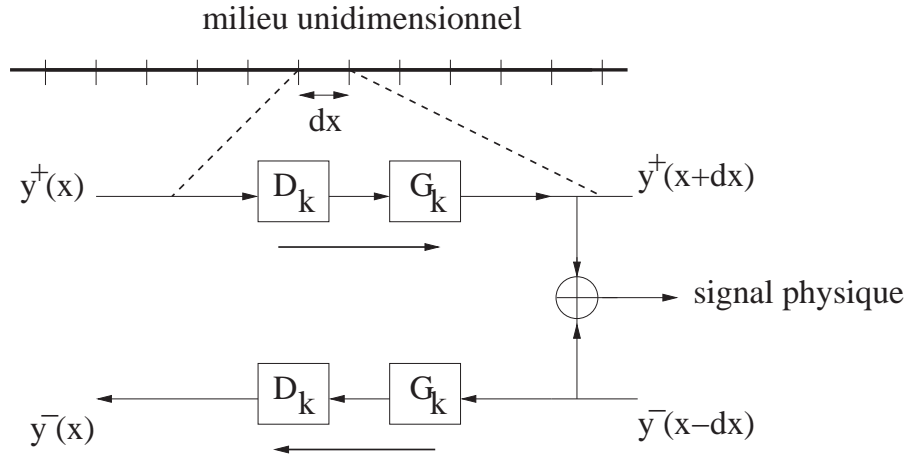


FIG. 2.2 – *Discrétisation d'un milieu unidimensionnel. Dans chaque portion élémentaire dx , la propagation d'une onde (progressive et régressive) est modélisée par deux filtres représentant la dispersion, la dissipation ($G_k(\omega)$) et le temps de propagation ($D_k(\omega)$).*

Comme le montre la figure (2.2), le milieu unidimensionnel est tout d'abord discrétisé et dans chaque portion élémentaire dx , la propagation de l'onde est modélisée par deux filtres dépendants de la fréquence : l'un représentant la dispersion et la dissipation (noté $G_k(\omega)$) et l'autre représentant le temps de propagation pour parcourir la portion élémentaire (noté $D_k(\omega)$).

Les filtres $G_k(\omega)$ et $D_k(\omega)$ étant supposés linéaires, on peut alors regrouper tous les filtres indexés par k correspondant à toutes les portions élémentaires dx en un seul filtre.

Dans le cas où l'on excite le milieu et l'on mesure le signal acoustique aux extrémités du milieu, le modèle guide d'onde correspondant est représenté la figure (2.3). La boucle de rétroaction du modèle traduit les multiples réflexions de la vibration à chaque extrémité du milieu borné.

Intéressons-nous au cas où l'excitation et la mesure s'effectue au même endroit (configuration de la figure du bas de (2.3)). La démarche serait identique dans le cas où le point d'excitation et le point de mesure se trouvent aux extrémités opposées du milieu.

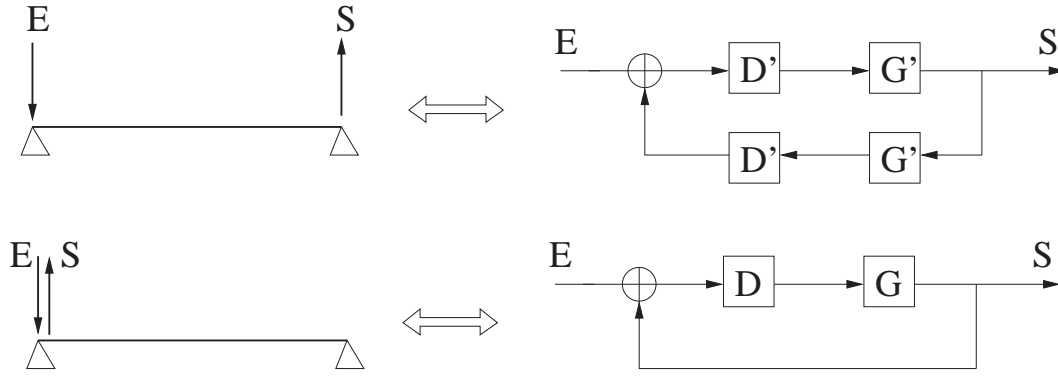


FIG. 2.3 – Représentations d'un modèle guide d'onde décrivant la propagation d'une onde dans un milieu unidimensionnel borné. **Figure du haut :** Cas où le point d'excitation et le point de mesure se trouvent aux extrémités opposés du milieu. **Figure du bas :** Cas où la mesure est effectuée au point où le système est excité. Dans les deux cas, $E(\omega)$ et $S(\omega)$ représentent respectivement le signal d'entrée et de sortie du modèle. Le filtre $D(\omega)$ (et $D'(\omega)$) représente le temps de propagation de l'onde pour aller du point d'excitation au point de mesure. Le filtre $G(\omega)$ (et $G'(\omega)$) représente les phénomènes de dispersion et de dissipation subis par l'onde lors de sa propagation.

2.2.1 Fonction de transfert du modèle

Le signal de sortie de ce modèle guide d'onde élémentaire s'écrit :

$$S(\omega) = G(\omega)D(\omega)(E(\omega) + S(\omega)) \quad (2.11)$$

De la relation (2.11), la fonction de transfert caractérisant le système s'écrit :

$$H(\omega) = \frac{S(\omega)}{E(\omega)} = \frac{G(\omega)D(\omega)}{1 - G(\omega)D(\omega)} \quad (2.12)$$

Le filtre $D(\omega)$ correspond à un retard pur et s'exprime dans le domaine fréquentiel sous la forme d'une exponentielle :

$$D(\omega) = e^{-i\omega d} \quad (2.13)$$

Le paramètre d correspond au temps de propagation de l'onde pour effectuer un aller-retour. Il est donc défini par :

$$d = \frac{2L}{c} \quad (2.14)$$

En effet, si l'on note \mathcal{F} l'application correspondant à la transformée de Fourier, \mathcal{T}_τ l'application correspondant à la translation en temps de τ , alors le retard d'un temps τ d'une fonction $f(t)$ se traduit dans le domaine fréquentiel par la multiplication par une exponentielle $e^{-i\omega\tau}$:

$$[\mathcal{F}\mathcal{T}_\tau f](\omega) = e^{-i\omega\tau}[\mathcal{F}f](\omega) \quad (2.15)$$

Le filtre $G(\omega)$ traduit les phénomènes de dispersion ou la dissipation rencontrés par l'onde initiale lors de sa propagation. Il dépend en général de la fréquence. Si l'on exprime le filtre $G(\omega)$ par son module et sa phase : $G(\omega) = |G(\omega)| e^{i\phi_G(\omega)}$, le module $|G(\omega)|$ doit être strictement inférieur à 1 (il n'y a pas de création d'énergie pendant la propagation). La phase $\phi_G(\omega)$ représente les phénomènes de dispersion. Le module $|G(\omega)|$ représente les phénomènes de dissipation. Les fréquences de résonance engendrées par le modèle correspondent aux valeurs ω pour lesquelles le dénominateur $1 - G(\omega)e^{-i\omega d}$. En supposant que le module $|G(\omega)|$ est localement constant par rapport à la fréquence, on est amené à résoudre :

$$\omega d - \phi_G(\omega) = 2n\pi \quad (2.16)$$

On peut alors déduire que les pulsations propres s'expriment sous la forme :

$$\omega_n = \frac{2n\pi + \phi_G(\omega_n)}{d} \quad (2.17)$$

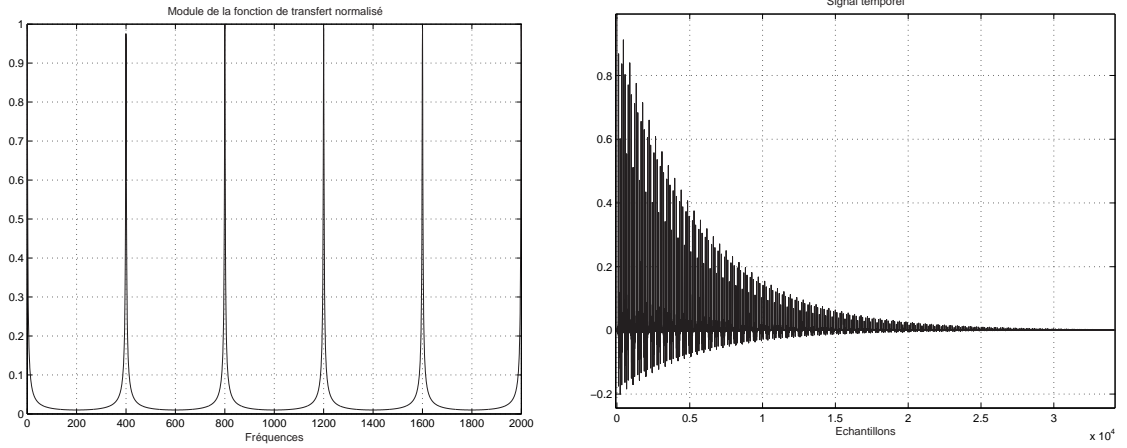


FIG. 2.4 – **Figure de gauche** : Module de la fonction de transfert d'un guide d'onde élémentaire en fonction de la fréquence pour un gain constant ($G(\omega) = cte$ pour tout ω). **Figure de droite** : Réponse impulsionnelle correspondante obtenue par transformée de Fourier inverse de la fonction de transfert.

La figure (2.4) représente le module de la fonction de transfert et la réponse impulsionnelle correspondante pour un filtre $G(\omega)$ réduit à un gain (c'est-à-dire $G(\omega) = cte$ pour tout ω).

L'expression de $G(\omega)$ est déduite de la relation de dispersion donnée par le modèle mécanique correspondant. Elle s'exprime différemment pour les ondes de compression et les ondes de flexion.

Ondes de compression Afin de déterminer la relation de dispersion dans le cas des ondes de compression, on fait propager une onde plane harmonique du type :

$$y(x,t) = Be^{i(\omega t - kx)} \quad (2.18)$$

On peut alors définir la relation de dispersion puis l'expression du nombre d'onde en remplaçant son expression dans l'équation du mouvement donnée en (2.1) :

$$-k^2 + \frac{1}{c_0^2}\omega^2 = 0 \quad \longrightarrow \quad k = \pm \frac{\omega}{c_0} \quad (2.19)$$

Le vecteur d'onde étant positif, on peut donc réécrire :

$$y(x,t) = Be^{i(\omega t - \frac{\omega}{c_0}x)} \quad (2.20)$$

La réponse impulsionnelle $h(x,t)$ de la poutre au point x est obtenue en sommant les contributions de toutes les pulsations ω , ce qui permet d'écrire :

$$h(x,t) = \int Be^{i(\omega t - \frac{\omega}{c_0}x)} d\omega = \int G(x,\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad \text{avec} \quad G(x,\omega) = Be^{-i\frac{\omega}{c_0}x} \quad (2.21)$$

Par définition, la grandeur $G(x,\omega)$ est la transformée de Fourier de $h(x,t)$.

Si la fonction de transfert est calculée sur toute la longueur de la poutre, le filtre de propagation s'écrit donc :

$$G(\omega) = |G(\omega)| e^{-i\frac{\omega}{c_0}L} \quad (2.22)$$

Ondes de flexion De même, on veut faire propager dans la poutre, une onde plane harmonique du même type que (2.18). On obtient la relation de dispersion puis l'expression du nombre d'onde en remplaçant l'expression de l'onde harmonique dans l'équation du mouvement donnée en (2.6) :

$$k^4 - \frac{\omega^2}{a^2} = 0 \quad \longrightarrow \quad k = \pm \sqrt{\frac{\omega}{a}} \quad \text{et} \quad k = \pm i \sqrt{\frac{\omega}{a}} \quad (2.23)$$

Les solutions réelles correspondent aux ondes harmoniques progressives et régressives tandis que les nombres d'onde imaginaires décrivent les ondes évanescentes.

De même, si la fonction de transfert est calculée sur toute la longueur de la poutre, le filtre de propagation s'écrit sous la forme :

$$G(\omega) = |G(\omega)| e^{-i\sqrt{\frac{\omega}{a}}L} \quad (2.24)$$

2.2.2 Réponse impulsionnelle du modèle - Problème direct

Ce paragraphe est intitulé *problème direct* car on cherche à caractériser la nature du signal temporel issu du modèle de synthèse pour un ensemble de paramètres de filtres donné. On cherche donc à déterminer les paramètres du signal de synthèse à partir de ceux des filtres du modèle de synthèse. On cherche ainsi la réponse impulsionnelle du modèle sous la forme d'une somme de sinusoides exponentiellement amorties :

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^N a_n(t) e^{-\alpha_n t} e^{i\omega_n t} \quad (2.25)$$

avec $a_n(t)$ l'amplitude (qui dépend du temps dans le cas général), α_n le coefficient d'amortissement et ω_n la pulsation propre de la composante n . On cherche à établir des relations entre les paramètres de cette solution $\{a_n(t), \alpha_n, \omega_n\}$ de toutes les composantes sinusoidales et les paramètres des filtres du modèle. Ainsi, on peut définir les paramètres du signal temporel de sortie en fonction des valeurs des filtres. Pour cela, on identifie la fonction de transfert du modèle (2.12) et la transformée de Fourier de cette solution (2.25). On obtient l'égalité suivante :

$$H(\omega) = \frac{G(\omega)e^{-i\omega d}}{1 - G(\omega)e^{-i\omega d}} = \sum_n \frac{a_n}{\alpha_n + i(\omega - \omega_n)} \quad (2.26)$$

qu'on réécrit :

$$H(\omega) = \frac{|G(\omega)| e^{-i(\omega d - \phi_G(\omega))}}{1 - |G(\omega)| e^{-i(\omega d - \phi_G(\omega))}} = \sum_n \frac{a_n}{\alpha_n + i(\omega - \omega_n)} \quad (2.27)$$

Chaque paramètre indexé par n est obtenu par une identification locale au voisinage de chaque résonance en supposant que deux modes de résonance successifs ne se superposent pas. On écrit localement pour $\omega = \omega_n + \varepsilon$:

$$H(\omega_n + \varepsilon) = \frac{|G(\omega_n + \varepsilon)| e^{-i((\omega_n + \varepsilon)d - \phi_G(\omega_n + \varepsilon))}}{1 - |G(\omega_n + \varepsilon)| e^{-i((\omega_n + \varepsilon)d - \phi_G(\omega_n + \varepsilon))}} = \frac{a_n}{\alpha_n + i\varepsilon} \quad (2.28)$$

On effectue un développement limité à l'ordre 1 de la phase de G :

$$\phi_G(\omega_n + \varepsilon) \approx \phi_G(\omega_n) + \varepsilon \phi'_G(\omega_n) + O(\varepsilon^2) \quad (2.29)$$

puis de l'exponentielle autour de la fréquence de résonance $\omega = \omega_n + \varepsilon$:

$$e^{-i((\omega_n + \varepsilon)d - \phi_G(\omega_n + \varepsilon))} \approx e^{-i(\varepsilon d - \phi_G(\omega_n + \varepsilon))} \approx e^{i\phi_G(\omega_n)} (1 - i\varepsilon(d - \phi'_G(\omega_n))) \quad (2.30)$$

L'égalité donnée en (2.28) doit être homogène en ε . Le développement limité de l'exponentielle s'arrête à l'ordre 0 pour le numérateur tandis que pour le dénominateur, il va jusqu'à l'ordre 1 en ε . En supposant que le module de G a un comportement régulier de manière à pouvoir supposer que $|G(\omega_n + \varepsilon)| \approx |G(\omega_n)|$, on peut réécrire la relation (2.28) :

$$H(\omega_n + \varepsilon) = \frac{G(\omega_n)}{1 - G(\omega_n)(1 - i\varepsilon(d - \phi'_G(\omega_n)))} = \frac{a_n}{\alpha_n + i\varepsilon} \quad (2.31)$$

En identifiant terme à terme suivant les puissances de ε , on peut donc exprimer les paramètres physiques (amplitude, temps de décroissance et fréquence propre de chaque composante n) en fonction des paramètres du modèle :

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{d - \phi'_G(\omega_n)} \\ \alpha_n = \frac{1 - G(\omega_n)}{G(\omega_n)(d - \phi'_G(\omega_n))} \\ \omega_n = \frac{2n\pi + \phi_G(\omega_n)}{d} \end{cases} \quad (2.32)$$

Les paramètres physiques du signal temporel exprimé en (2.25) sont donc définis à partir des valeurs des filtres par les relations établies en (2.32).

2.2.3 Détermination des paramètres du modèle à partir de l'analyse de signaux - Problème inverse

En pratique, on cherche à simuler le son produit pour une structure donnée. Pour cela, il faut donc déterminer les valeurs des filtres $G(\omega)$ et $D(\omega)$ adéquats de manière à produire le son. Par rapport au paragraphe précédent, cela revient à traiter le problème inverse. Ces filtres peuvent être définis à partir des relations établies en (2.32).

On extrait par l'analyse du signal, les valeurs des pulsations propres ω_n et les amplitudes a_n . En supposant que $\phi_G(\omega_1) = 0$, on en déduit de la troisième relation de (2.32), d à partir de la valeur de la pulsation fondamentale ω_1 :

$$d = \frac{2\pi}{\omega_1} \quad (2.33)$$

A partir des autres valeurs des pulsations ω_n et de la valeur de d , on en déduit celles de la phase de $\phi_G(\omega_n)$ aux pulsations propres :

$$\phi_G(\omega_n) = \omega_n d - 2n\pi \quad (2.34)$$

En inversant la deuxième relation de (2.32), on en déduit :

$$G(\omega_n) = \frac{1}{1 + \alpha_n(d - \phi'_G(\omega_n))} \quad (2.35)$$

La dérivée de la phase $\phi'_G(\omega_n)$ peut être obtenue en première approximation par la relation suivante :

$$\phi'_G(\omega_n) \approx \frac{\phi_G(\omega_{n+1}) - \phi_G(\omega_n)}{\omega_{n+1} - \omega_n} \quad (2.36)$$

Ainsi, pour définir les paramètres du modèle, il faut pouvoir extraire de l'analyse du signal les principales grandeurs physiques telles que les pulsations propres ω_n , les amplitudes a_n et les coefficients d'amortissement α_n .

2.2.4 Applications du modèle de synthèse unidimensionnel

Pour la synthèse de sons d'instruments de musique traditionnels, le modèle guide d'onde élémentaire permet de simuler le comportement vibratoire de résonateurs unidimensionnels simples. Par exemple, pour les instruments à cordes tels que le piano, la guitare, ce modèle est utilisé pour simuler le comportement vibratoire de la corde [59]. Dans le cas des instruments à vent tels que la flûte, la clarinette, il est utilisé pour simuler celui du tuyau. L'avantage de ces modèles de synthèse réside dans la facilité de mise en œuvre et dans leur contrôle. En effet, étant donné que les paramètres des filtres peuvent être reliés aux grandeurs physiques, il est alors possible de simuler un résonateur plus long en modifiant simplement le paramètre qui correspond à la longueur de la structure. Par ailleurs, il est possible de créer aisément de nouvelles sonorités en simulant par exemple le comportement vibratoires de structures physiques qui ne peuvent pas exister dans la réalité.

2.3 Extensions du modèle unidimensionnel

Dans ce paragraphe, je propose plusieurs extensions possibles du modèle unidimensionnel que j'ai présenté précédemment. Je parlerai par la suite du cas de la poutre mais ce modèle peut correspondre à toute autre structure unidimensionnelle de ce type. En parallèle avec les nombreuses applications musicales, ce modèle de synthèse peut trouver des applications dans d'autres domaines de recherche. En particulier, nous verrons plus tard que ce modèle trouve sa place dans la caractérisation de structures unidimensionnelles comportant des défauts par méthode non destructive. Dans ce cadre, à partir du modèle de synthèse, il est alors possible d'y inclure une hétérogénéité et de prédire le comportement vibratoire d'une poutre comportant un défaut ponctuel.

2.3.1 Modèle de synthèse d'une poutre comportant un défaut ponctuel

Le modèle que je vais présenter dans ce paragraphe est basé sur le concept de la jonction de Kelly-Lochbaum [43] [49]. Il a été initialement utilisé dans la simulation du conduit vocal pour la synthèse de la parole. Dans ce contexte, le conduit vocal est modélisé par un tube cylindrique de section variable et les discontinuités par morceau de la section sont pris en compte par autant de jonctions de la forme de Kelly-Lochbaum, comme le montre la figure (2.5).

L'impédance acoustique Z_m étant donnée par la relation :

$$Z_m = \frac{\rho_a c}{A_m} \quad (2.37)$$

avec ρ_a la masse volumique du fluide à l'intérieur du tube, c la vitesse des ondes à l'intérieur du tube et A_m l'aire de la m ème section perpendiculaire, le coefficient de réflexion de la m ème jonction est déterminé par :

$$R_m = \frac{Z_m - Z_{m-1}}{Z_m + Z_{m-1}} \quad (2.38)$$

En se basant sur ce principe, je propose ici un modèle équivalent où le défaut est modélisé par une jonction de ce type. Le modèle guide d'onde représenté sur la figure (2.6) modélise une structure de type poutre comportant une hétérogénéité très localisée. Cette dernière peut représenter une cassure physique ou une fissure dans la structure. La trajectoire des ondes le long de la poutre peut être suivie sur le schéma du modèle.

A partir du schéma (2.6), la fonction de transfert $H(\omega)$ se calcule à partir des relations suivantes :

$$\begin{cases} x_1 = EF_1 + F_1^2(Rx_1 + (1 - R)x_2) \\ x_2 = F_2^2((1 + R)x_1 - Rx_2) \\ x_2 = SF_2 \end{cases} \quad (2.39)$$

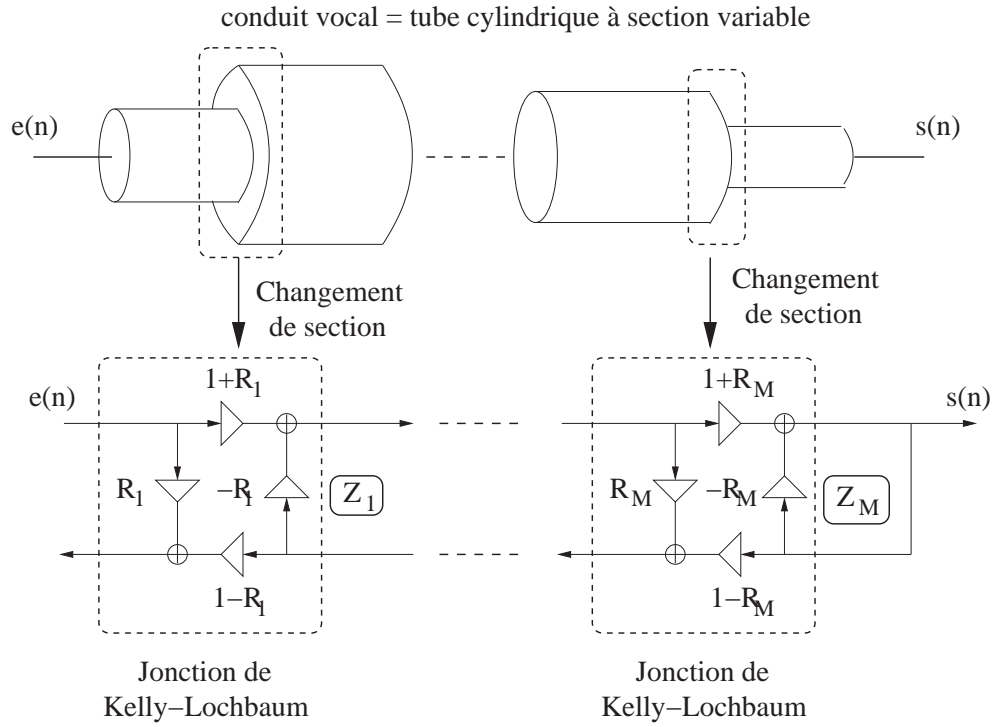


FIG. 2.5 – Utilisation de la jonction de Kelly-Lochbaum au niveau du changement de section dans le modèle du conduit vocal (représenté comme une succession de tubes cylindriques de section variable) pour la synthèse de la parole.

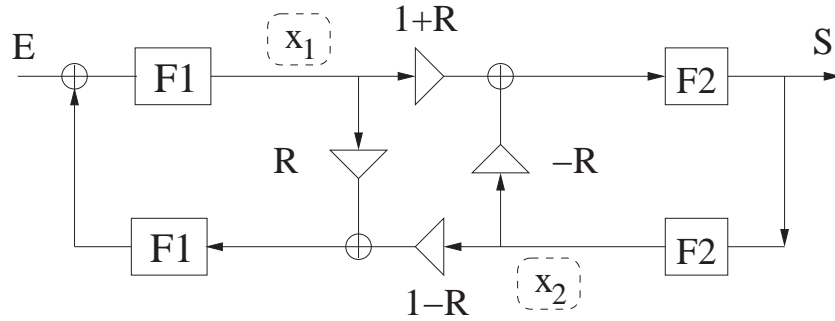


FIG. 2.6 – Modèle de synthèse d'une poutre comportant un défaut ponctuel. Ce modèle utilise la jonction de Kelly-Lochbaum pour modéliser la présence de l'hétérogénéité.

ce qui permet d'en déduire :

$$H(\omega) = \frac{S(\omega)}{E(\omega)} = \frac{F_1(\omega)F_2(\omega)(1+R)}{1 - RF_1^2(\omega) + RF_2^2(\omega) - (F_1(\omega)F_2(\omega))^2} \quad (2.40)$$

Les filtres F_1 et F_2 représentent les phénomènes de propagation, de dissipation et de dispersion dans chacune des deux demi-poutres. R représente le coefficient de réflexion et varie de 0 (interface transparente) à 1 (réflexion totale). Ce coefficient de réflexion au niveau de l'interface {poutre/défaut} est donné par l'expression suivante [41] :

$$R = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \quad (2.41)$$

avec Z_1 et Z_2 les impédances mécaniques des deux milieux de part et d'autre de l'interface, comme l'illustre la figure (2.7). Cette relation est définie à partir de la condition de continuité du déplacement au niveau de l'interface. Le coefficient de réflexion énergétique est défini par R^2 . Le coefficient de transmission correspondant est alors défini par $T^2 = 1 - R^2$.

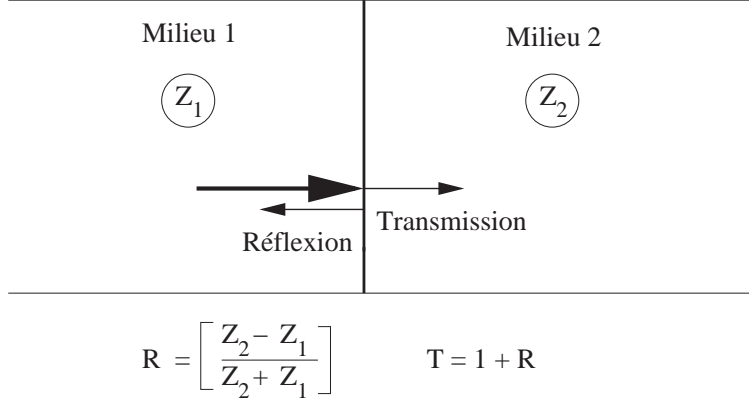


FIG. 2.7 – Interface séparant deux milieux différents d'impédances mécaniques Z_1 et Z_2 . R représente le coefficient de réflexion alors que T représente le coefficient de transmission correspondant. Cette relation est définie à partir de la condition de continuité du déplacement au niveau de l'interface.

Dans notre cas, à cause de la symétrie du problème, les coefficients R ont des valeurs égales au niveau des deux interfaces du défaut. Sachant que la définition de R dépend de la direction de propagation de l'onde, ils sont de signe opposé.

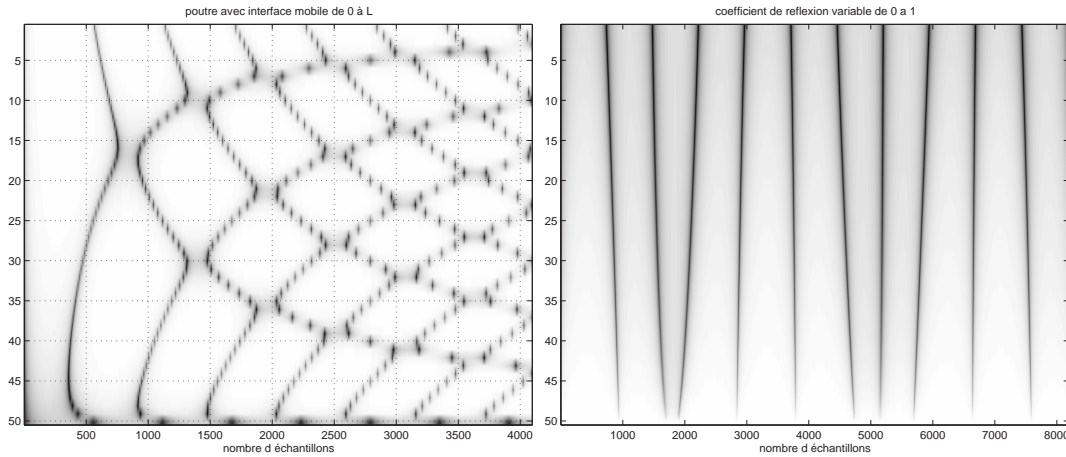


FIG. 2.8 – **Figure de gauche :** Ondes de compression. Evolution du spectre lorsque l'on fait varier la position de l'interface avec un coefficient de réflexion fixé à 0.9. **Figure de droite :** Ondes de compression. Evolution du spectre lorsque l'on fait varier le coefficient de réflexion de 0 à 1.

Les graphes de la figure (2.8) représentent des résultats de simulation obtenus avec ce modèle. Chaque graphe se lit en deux dimensions (suivant l'axe des abscisses et suivant l'axe des ordonnées) et s'interprète de la manière suivante. L'axe des abscisses correspond à l'axe des fréquences. L'axe des ordonnées correspond aux valeurs du paramètre considéré (qui est la position sur la figure de gauche ou le coefficient de réflexion sur la figure de droite). Chaque ligne de ce graphe représente le module du spectre généré par le modèle guide d'onde en fonction des fréquences pour une valeur donnée du paramètre. Plus l'amplitude du spectre est grande, plus la

couleur correspondante est sombre. Les résonances sont donc repérées par des raies sombres. La première ligne correspond à la valeur initiale du paramètre. Ainsi, la figure de gauche de (2.8) représente l'évolution du spectre du signal du modèle de synthèse en fonction de la position de l'interface. L'interface se déplace d'une extrémité à l'autre de la poutre par pas d'espace de $1/50$. Le coefficient de réflexion est fixé à 0.9. On peut noter un décalage progressif des résonances. Certains modes se rapprochent pour des valeurs particulières de la position de l'interface. La figure de droite de (2.8) représente l'évolution du spectre du signal du modèle de synthèse en fonction de la valeur du coefficient de réflexion R . R varie de 0 à 1 par pas de $1/50$. La position de l'interface est fixée arbitrairement au 4.62ième de la longueur totale de la poutre en partant d'une extrémité. On note également le fait que certaines résonances se décalent plus que d'autres. Par ailleurs, les amplitudes des résonances diminuent lorsque R augmente.

2.3.2 Modélisation d'une poutre comportant un ou plusieurs défauts non ponctuels

Le modèle mécanique d'une poutre comportant un défaut peut être obtenu en établissant un système de trois équations couplées correspondant aux trois milieux de propagation (les deux demi-poutres et le défaut) avec les conditions de continuité au niveau des deux interfaces séparant le défaut de la poutre saine. Deux modèles de synthèse correspondants (modèle général et modèle simplifié) sont présentés sur la figure (2.9). Dans le modèle général, le défaut est considéré comme un milieu à part entière séparé des deux portions de poutre par deux interfaces (les interfaces sont chacune modélisées par une jonction de Kelly-Lochbaum). Les phénomènes de réflexion au niveau des deux interfaces du défaut est représenté par le filtre R . En supposant que les pertes au niveau de l'interface sont prises en compte dans les filtres de propagation, les phénomènes de transmission sont définis par les filtres $1 - R$. Dans le modèle simplifié, le défaut et les deux interfaces sont regroupés en une seule jonction.

La fonction de transfert $H_1(\omega)$ du modèle général s'écrit :

$$H_1(\omega) = \frac{S(\omega)}{E(\omega)} = \frac{F_1 F_2 F_3 (1 - R)(1 + R)}{P} \quad (2.42)$$

avec :

$$\begin{cases} P = (1 + R F_1^2)(1 + R F_3^2)(1 - R^2 F_2^2) - Q(1 - R^2) \\ Q = R^2 (F_1 F_2 F_3)^2 + R(F_1 F_2)^2 + R(F_2 F_3)^2 + (F_1 F_2 F_3)^2 \end{cases}$$

$E(\omega)$ et $S(\omega)$ représentent les transformées de Fourier des signaux d'entrée et de sortie du modèle, et $F_{k=1,2,3}(\omega)$ les filtres représentant la propagation, la dissipation et la dispersion dans chaque milieu (les deux demi-poutres et le défaut). La fonction de transfert de $H_2(\omega)$ du modèle simplifié s'écrit :

$$H_2(\omega) = \frac{F_1 F_2 T}{(1 - R F_1^2)(1 - R F_2^2) - (F_1 F_2 T)^2} \quad (2.43)$$

Les filtres $F_{k=1,2}(\omega)$ représentent la propagation, la dissipation et la dispersion dans chaque milieu. Le filtre R représente le coefficient de réflexion au niveau de l'interface {poutre/défaut} et le filtre T , le coefficient de transmission à travers le défaut.

Les simulations obtenues avec ce modèle sont similaires à celles présentées dans le paragraphe précédent. Je constate de la même manière un déplacement des fréquences de résonance en fonction du décalage de la position du défaut, ou de la valeur du coefficient de réflexion, ou encore de la taille du défaut.

La généralisation à plusieurs défauts est également envisageable avec ce modèle de synthèse. Alors que la modélisation d'une poutre comportant plusieurs hétérogénéités est complexe à résoudre du point de vue de la théorie mécanique, la mise en œuvre du modèle de synthèse correspondant à ce cas est plus aisée. En effet, du point de vue de la mécanique, la détermination des modes

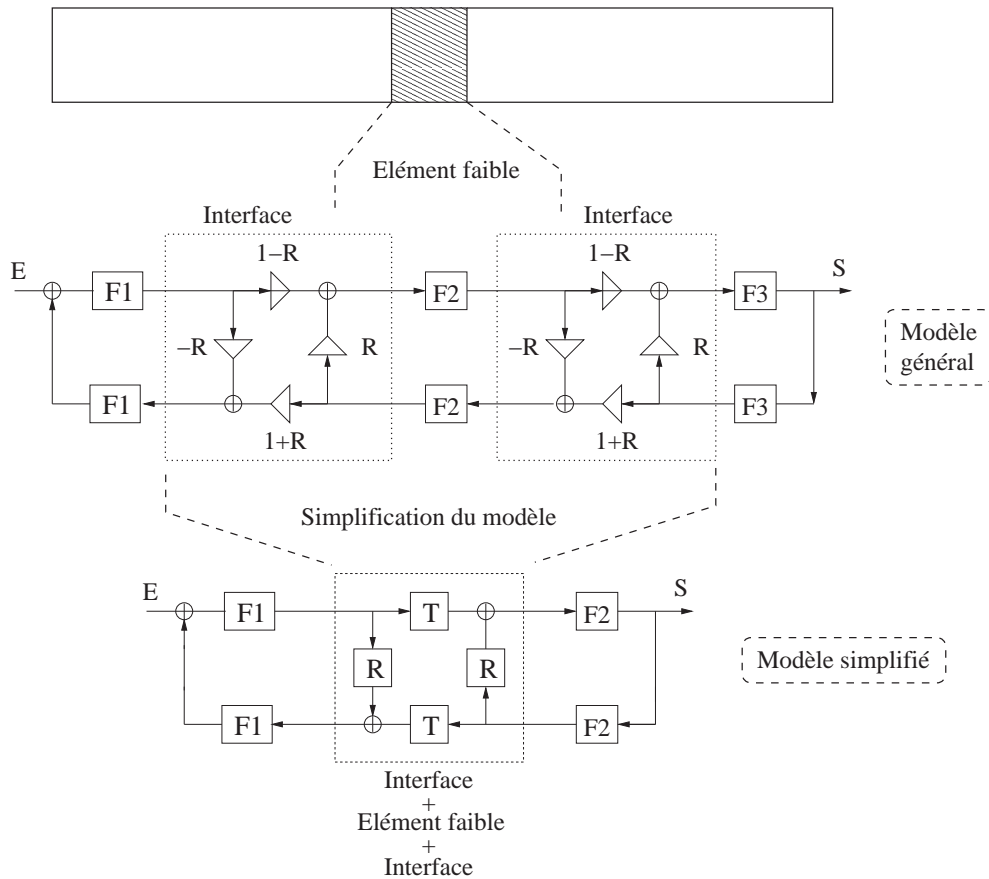


FIG. 2.9 – *Modèle guide d'onde général et modèle guide d'onde simplifié représentant une poutre saine comportant une hétérogénéité. Dans le modèle général, le défaut est considéré comme un milieu à part entière qui est séparé des deux portions de poutres par deux interfaces (modélisées par une jonction de Kelly-Lochbaum). Les phénomènes de réflexion au niveau des deux interfaces du défaut sont représentés par le filtre R . En supposant que les pertes au niveau de l'interface sont pris en compte dans les filtres de propagation, les phénomènes de transmission sont définis par les filtres $1 - R$. Dans le modèle simplifié, le défaut et les deux interfaces sont regroupés en une seule jonction. Les filtres $F_{i=1,2,3}$ traduisent la propagation, la dissipation et la dispersion dans les différentes portions de la poutre.*

propres de la poutre défectueuse revient à résoudre un système de $N + 1$ équations du mouvement avec $2N$ conditions de continuité au niveau des interfaces, N étant le nombre de défauts. Chaque équation du mouvement décrit les vibrations à l'intérieur d'une portion de poutre. Ce système d'équations couplées ne devient plus soluble de manière analytique pour un nombre N grand. Du point de vue de la synthèse, à partir du modèle présenté sur la figure (2.9) (ou sur la figure (2.6) dans le cas où chaque hétérogénéité est une cassure), il suffit de reproduire le schéma élémentaire correspondant à une hétérogénéité.

2.4 Validation expérimentale d'un modèle de synthèse

Durant ma première année de thèse, j'ai eu l'occasion de participer à la collaboration entre le LMA, le CIRAD (Centre de coopération internationale en recherche agronomique pour le développement) et le CTBA (Centre Technique du Bois et de l'Ameublement) sur une étude de détection et de caractérisation de défauts dans des produits usinés en bois par analyse de signaux

vibratoires acoustiques [14]. L'idée a consisté à utiliser un des modèles de synthèse proposés précédemment pour prédire la présence d'éventuels défauts dans un produit usiné [5] [6] (voir article dans l'annexe D). Le modèle de simulation choisi pour prédire le comportement du futur produit usiné est le modèle simplifié présenté en 2.3.2 (schéma du bas de la figure 2.9).

Pour cela, des tests dynamiques préliminaires ont été réalisées sur des poutres en bois calibrées où les caractéristiques géométriques et mécaniques sont connues. Ainsi, les signaux de synthèse obtenus après implémentation du modèle de synthèse avec les valeurs de ces données pourront être comparés aux signaux expérimentaux obtenus par les tests dynamiques. La pertinence et l'efficacité du modèle peuvent être validées et le modèle pourra être utilisé dans le cadre de ce projet. Les tests préliminaires ont été réalisés sur des poutres en bois de deux espèces différentes : le grignon franc et l'ébène verte. Les caractéristiques mécaniques de ces espèces ont été obtenues expérimentalement et sont données dans le tableau (2.1). En effet, toutes les poutres ont été pesées et leur volume respectif a été évalué. A partir des valeurs de poids et de volume, la masse volumique a pu être déterminée en moyennant les valeurs obtenues pour toutes les poutres. Le module élastique a été déterminé à partir de la mesure des trois premières fréquences de vibration. En utilisant la relation déduite de l'équation de Bernoulli (2.5), une valeur moyenne pour chaque poutre est définie en minimisant l'erreur sur les trois fréquences propres. Enfin, une valeur moyenne globale est définie en moyennant toutes les valeurs précédentes.

Nom commun	Nom botanique	Densité (en g/cm^3)	Module élastique (en MPa)
Grignon franc	<i>Ocotea rubra Mez</i>	0.65	775
Ebène verte	<i>Tabebuia spp.</i>	1.10	2360

TAB. 2.1 – Caractéristiques des deux espèces de bois utilisées pour la fabrication des poutres pour les tests dynamiques. Le module élastique est valable dans le sens des fibres du bois.

2.4.1 Protocole expérimental

Pour chaque espèce de bois, nous avons fait usiner dix poutres identiques de dimension $20 \times 20 \times 400 \text{ mm}$. Ces poutres ont été choisies de manière à ce qu'elles soient sans défauts apparents et coupées de telle manière à ce que l'axe longitudinal des poutres corresponde à la direction parallèle aux fibres du bois. Les essences de bois ont été sélectionnées en fonction des disponibilités de stock et de leurs caractéristiques mécaniques qui vérifient globalement les domaines de validité du modèle de synthèse qui sont : l'homogénéité des propriétés mécaniques dans la direction longitudinale de la poutre et donc absence de singularités. Un défaut a ensuite été créé artificiellement à l'intérieur de chaque poutre.

Le principe d'inclusion du défaut, illustré par la figure (2.10), est le suivant. La poutre a été sectionnée à une certaine position pour libérer un cube de 20 mm de côté. Ce cube a ensuite été recollé à la même position après une rotation de 90° de manière à ce que la direction tangentielle (direction perpendiculaire aux fibres du bois) du cube soit colinéaire à l'axe longitudinal de la poutre. Ainsi, pour la première poutre, la découpe a lieu à une des extrémités. Puis successivement, la position du défaut est décalée par pas de 20 mm , ce qui correspond à la largeur du défaut.

Le dispositif expérimental comprend un banc de mesures vibratoires et une chaîne d'acquisition qui enregistre et analyse les signaux mesurés. Chaque poutre est positionnée sur un support élastique pour favoriser les oscillations libres. Elle est ensuite excitée avec un marteau force à une extrémité dans la direction transversale de manière à générer des ondes de flexion. Les signaux temporels sont mesurés avec un microphone placé à l'autre extrémité.

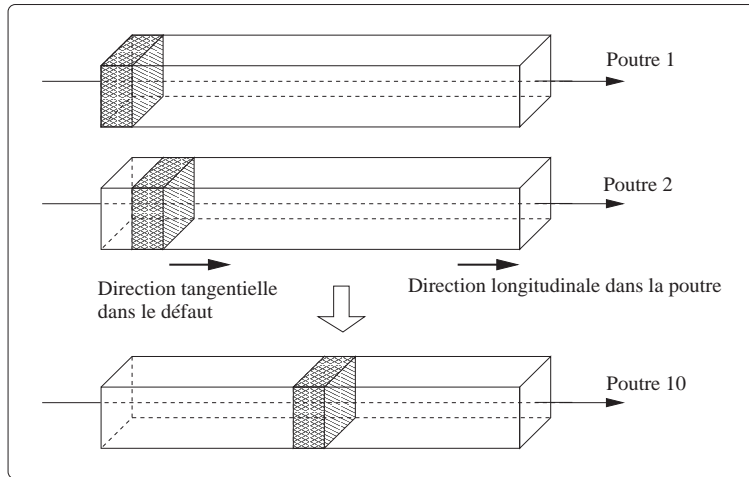


FIG. 2.10 – Pour les dix poutres usinées, un défaut a été créé artificiellement. Le principe d'inclusion du défaut artificiel est le suivant. La poutre a été sectionnée à une certaine position pour libérer un cube de 20 mm de côté. Ce cube a ensuite été recollé à la même position après une rotation de 90 ° de manière à ce que la direction tangentielle (direction perpendiculaire aux fibres du bois) du cube soit colinéaire à l'axe longitudinal de la poutre.

2.4.2 Résultats et interprétations

Les figures de gauche de (2.11) et de (2.12) représentent les spectres des dix signaux expérimentaux obtenus respectivement pour l'ébène verte pour le grignon franc. Comme pour la figure (2.8), chaque graphe se lit en deux dimensions et s'interprète de la manière suivante. L'axe des abscisses représente l'axe des fréquences (en nombre d'échantillons). L'axe des ordonnées correspond à la position du défaut dans la poutre (indexée de 1 à 10). Chaque ligne de ce graphe représente le module du spectre correspondant à une poutre. Plus l'amplitude du spectre est grande, plus la couleur correspondante est sombre. Les résonances sont donc repérées par des raies sombres.

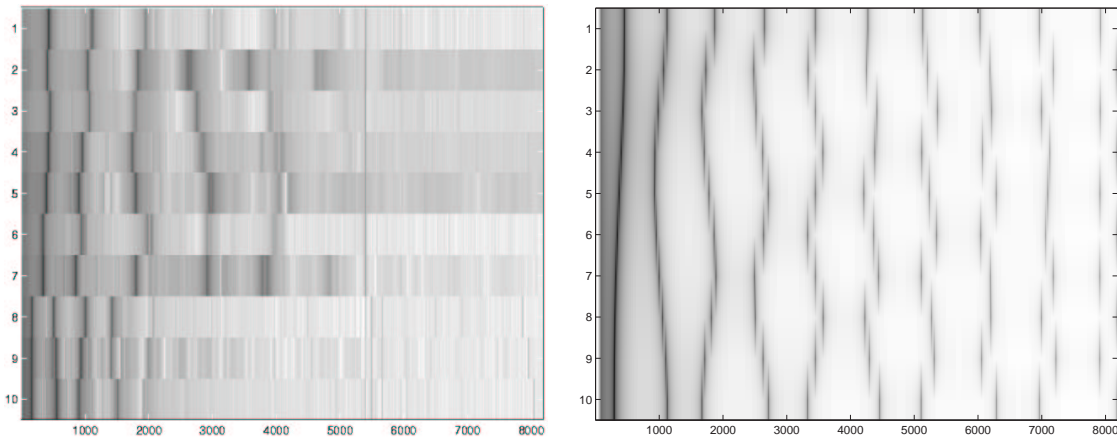


FIG. 2.11 – Résultats expérimentaux (figure de gauche) et de simulation (figure de droite) avec le modèle guide d'onde pour l'ébène verte.

Afin que le modèle de synthèse puisse simuler ces signaux expérimentaux, les filtres ont été calés de sorte que les signaux de synthèse ressemblent au mieux aux signaux expérimentaux d'un point de vue perceptif. Le modèle choisi est donc le modèle simplifié présenté dans le paragraphe 2.3.2. Les filtres $F_{n=1,2}(\omega)$ s'écrivent en fonction des filtres $F_{n,prop}(\omega)$ qui traduisent la propaga-

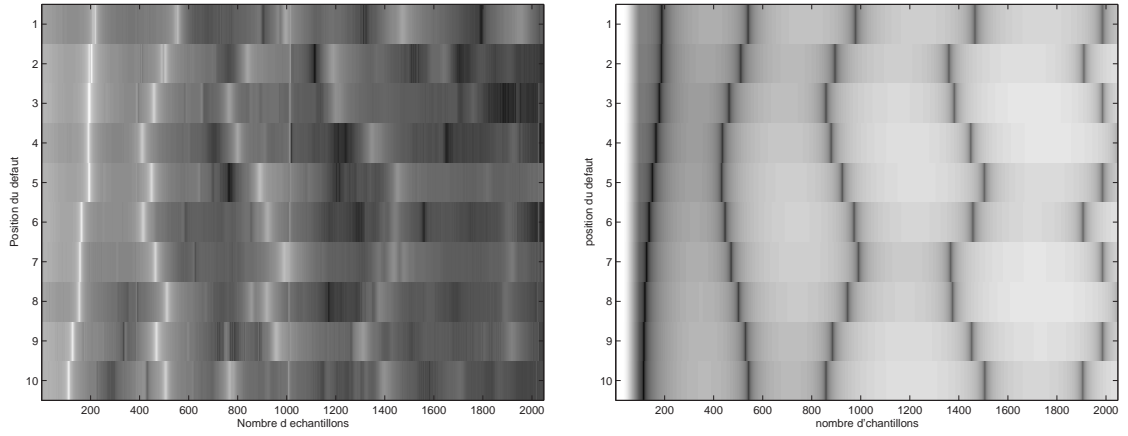


FIG. 2.12 – Résultats expérimentaux (figure de gauche) et de simulation (figure de droite) avec le modèle guide d'onde pour le grignon franc.

tion et des filtres $F_{n,dis}(\omega)$ qui traduisent la dissipation et la dispersion :

$$F_n(\omega) = |F_n(\omega)| F_{n,prop}(\omega) F_{n,dis}(\omega) \quad n = 1, 2 \quad (2.44)$$

avec :

$$\begin{cases} |F_n(\omega)| = 0.998 \\ F_{n,prop}(\omega) = e^{-i\omega d_n} \\ F_{n,dis}(\omega) = e^{-i\sqrt{\frac{\omega}{a}} d_n} \end{cases} \quad (2.45)$$

L'expression de $F_{n,dis}(\omega)$ vient de la relation (2.24) car les poutres sont sollicitées en flexion et le paramètre a se calcule numériquement à partir du tableau (2.1), ce qui donne :

$$a = \sqrt{\frac{EI}{\rho S}} = 19,9357 \quad (2.46)$$

avec $I = \frac{\ell^4}{12}$, le moment quadratique pour une section carrée de côté ℓ . Rappelons que le paramètre d s'écrit :

$$d = \frac{L}{c} \quad (2.47)$$

avec c la vitesse de propagation des ondes de flexion et L la longueur de la poutre. Les filtres de réflexion et de transmission R et T ont été déterminés de manière arbitraire et ont été fixés à :

$$\begin{cases} R = 0.425i \\ T = 0.9 \end{cases} \quad (2.48)$$

Le filtre R est imaginaire car il prend en compte le déphasage traduisant le changement de direction de propagation au cours de la réflexion. On peut noter que les relations écrites en (2.48) ne vérifient pas la relation $RR^* + TT^* = 1$, qui traduit la conservation de l'énergie dans le système. En effet, dans le modèle simplifié que l'on a considéré, les filtres R et T prennent en compte les phénomènes de pertes se produisant à l'intérieur du défaut.

Par ailleurs, afin de pouvoir écouter les sons de synthèse et de les comparer perceptivement aux sons expérimentaux, la réponse impulsionnelle du modèle a été convoluée avec un signal d'entrée reproduisant l'impact entre un exciteur et un résonateur. Ce signal d'entrée est déduit d'un modèle simple d'interaction entre deux corps solides, qui se traduit par l'expression suivante :

$$e(t) = \begin{cases} \sin\left(\frac{t}{T}\right) & \text{si } 0 \leq t \leq T/2 \\ 0 & \text{si } t > T/2 \end{cases} \quad (2.49)$$

avec T correspondant à la période de la sinusoïde. Plus T est petit, plus le temps de contact est court.

Les résultats de simulation sont présentés sur les figures (2.11) et (2.12) à droite des résultats expérimentaux pour chaque espèce de bois. Les comparaisons entre les spectres permettent de valider le modèle de synthèse. L'évolution des spectres pour les deux essences de bois sont similaires. De plus, les sons de synthèse obtenus avec le modèle sont satisfaisants d'un point de vue perceptif (exemples sonores sur le CD d'accompagnement). Ils sont comparables aux signaux expérimentaux. Par ailleurs, on retrouve de manière expérimentale le fait qu'un déplacement du défaut provoque effectivement un déplacement des pulsations propres de la poutre.

Dans le cadre de la simulation sonore, ces modèles de synthèse permettent de construire de nouveaux instruments de musique virtuels. En particulier, dans la continuité des modèles de poutres à défauts, il est tout à fait envisageable de concevoir un *xylophone à défaut* où les lames de bois auraient à la même longueur et les différentes hauteurs tonales seraient obtenues en incluant de manière pertinente un défaut.

Par ailleurs, ces méthodes de synthèse constituent une première approche basée sur l'analyse vibratoire des signaux acoustiques dans le contrôle non-destructif des systèmes mécaniques tels que des poutres présentant un élément faible. Les méthodes de simulation permettent également de prédire des comportements vibratoires ou même de localiser un éventuel défaut.

Conclusions sur ce chapitre

Dans ce chapitre, un modèle de synthèse pour la simulation de vibrations de structures physiques unidimensionnelles de type poutre a été présenté. Le modèle est basé sur le concept des modèles guides d'onde numériques décrits par J. O. Smith dans le cadre de la simulation des vibrations d'une corde tendue. Ces modèles ont l'avantage de pouvoir être facilement mis en œuvre. Les applications sont nombreuses aussi bien dans le domaine de la synthèse sonore musicale que dans d'autres domaines de recherche. Les paramètres des modèles de synthèse sont directement reliés aux grandeurs physiques caractérisant la structure. Ainsi, en établissant des méthodes d'analyse adaptées à un son donné, il est alors possible de reproduire ce son de manière satisfaisante.

Par la suite, plusieurs extensions possibles du modèle ont été présentées, notamment la possibilité d'inclure la présence d'hétérogénéités dans la structure. Ce modèle a ainsi été utilisé dans le cadre d'une étude sur la caractérisation de poutres usinées comportant un défaut par l'analyse de signaux acoustiques et vibratoires.

Transition vers le cas multidimensionnel La méthode de synthèse présentée dans ce chapitre peut être généralisée au cas multidimensionnel. En effet, nous allons voir que les méthodes existantes pour simuler des vibrations de structures multidimensionnelles sont conçues à partir de guides d'ondes unidimensionnels couplés de manière pertinente. Il devient alors possible de simuler des vibrations de systèmes physiques plus complexes avec des modèles de synthèse relativement simples à implémenter. Ceci constitue la thématique du chapitre suivant.

Chapitre 3

Cas de structures multidimensionnelles

Ce chapitre est consacré au cas multidimensionnel et présente les méthodes de simulation de sons produits par une telle structure. Les modèles qui sont présentés ici sont basés sur une modélisation physique. Le comportement vibratoire de la structure est à priori connu, ce qui limite les cas que l'on peut considérer. En pratique, on ne pourra traiter que les cas où les solutions analytiques sont connues. Par rapport aux cas de structures unidimensionnelles, les sons produits par des structures multidimensionnelles sont spectralement plus riches.

Je présenterai dans un premier temps, les principales méthodes existantes qui permettent de simuler les vibrations de systèmes physiques multidimensionnels. En me basant sur les solutions analytiques données par la mécanique vibratoire de structures simples, je présenterai par la suite deux modèles de synthèse qui constituent une bonne alternative aux modèles existants. Dans un troisième temps, je présenterai une méthode de calage des paramètres à partir de l'analyse de signaux réels qui va ainsi permettre de déterminer un modèle de membrane ou une plaque mince équivalente du point de vue perceptif à une structure réelle. J'exposerai enfin les limitations de cette méthode de calage.

3.1 Principales méthodes de simulation existantes

Il est intéressant d'effectuer tout d'abord un état général de la recherche dans le domaine de la synthèse sonore en présentant les principales méthodes de simulation de vibrations de structures multidimensionnelles existantes. Dans le cadre de cette étude, je me limiterai aux méthodes basées sur la modélisation physique de la structure. Parmi les nombreuses méthodes existantes, j'aborderai successivement : le réseau récursif de lignes à retard, le réseau de guides d'onde numériques, le système CORDIS-ANIMA et le logiciel MODALYS.

3.1.1 Réseau récursif de lignes à retard

Cette technique a été initialement utilisée pour la reproduction des effets de salle, notamment la réverbération. Ce type de méthode permet également de simuler les vibrations de structures multidimensionnelles. Le pionnier fut M. Schroeder [57] qui a proposé il y a plus de trente ans, l'utilisation de filtres passe-tout et de filtres en peigne récursifs pour simuler des échos artificiels multiples. A partir de la technique proposée par M. Schroeder, J. Stautner et M. Puckette ont proposé une méthode constituée d'un réseau récursif de lignes à retard, que je noterai par la suite FDN (de l'anglais Feedback Delay Network) [62] [39]. Cette méthode est une généralisation du filtre en peigne récursif dont la formule de récurrence s'écrit :

$$y(n) = x(n - N) + gy(n - N) \quad (3.1)$$

avec $y(n)$ la valeur de sortie de l'échantillon n , N un entier positif, $x(n)$ la valeur d'entrée à l'échantillon n et g un gain.

La figure (3.1) représente un exemple de réponse impulsionnelle de ce filtre pour un gain $g = 0.8$ et N l'entier le plus proche du rapport τ/T_e , avec $\tau = 0.1$ s et T_e étant la période d'échantillonnage. Cette technique reproduit effectivement le phénomène d'échos multiples et le premier écho apparaît bien à $\tau = 0.1$ s après l'impulsion initiale avec une amplitude diminuée d'un facteur $g = 0.8$.

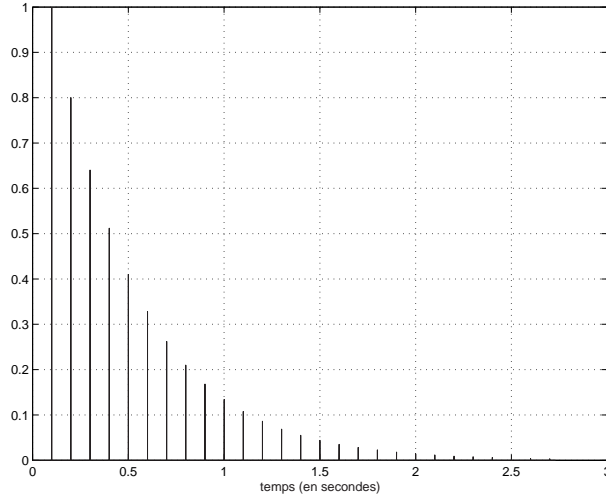


FIG. 3.1 – Exemple de réponse impulsionnelle du filtre en peigne défini par la relation (3.1). Les paramètres sont $g = 0.8$ et $N =$ l'entier le plus proche du rapport τ/T_e , avec $\tau = 0.1$ s et T_e étant la période d'échantillonnage. Le premier écho apparaît bien à $\tau = 0.1$ s après l'impulsion initiale avec une amplitude diminuée d'un facteur $g = 0.8$.

La généralisation de cette relation est obtenue en remplaçant la simple ligne à retard de longueur N échantillons par une matrice diagonale constituée de lignes à retard de longueurs différentes. Le gain g a été remplacé par une matrice $\mathbf{G} = \mathbf{U}\mathbf{D}$, où \mathbf{U} est une matrice identité et \mathbf{D} une matrice diagonale constituée d'éléments dont la valeur est inférieure à 1. Le modèle est alors entièrement caractérisé par les relations de récurrence suivantes :

$$\begin{cases} y(n) &= \sum_{i=1}^N c_i s_i(n) + dx(n) \\ s_i(n - m_i) &= \sum_{j=1}^N a_{ij} s_j(n) + b_i x(n) \end{cases} \quad (3.2)$$

où $s_i(n)$ représentent les sorties des lignes à retard à l'échantillon n . La figure (3.2) correspond au schéma d'un FDN d'ordre trois. L'ordre correspond au nombre de lignes à retard prises en compte dans le modèle.

Applications du modèle

Cette technique de FDN fut initialement étudiée pour simuler des effets de réverbération ou d'échos multiples dans une salle [39] [40]. Si l'on considère une pièce parallélépipédique de dimensions $L_x \times L_y \times L_z$, on connaît alors l'expression des fréquences propres :

$$f_{n_x n_y n_z} = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{n_x}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{n_y}{L_y}\right)^2 + \left(\frac{n_z}{L_z}\right)^2} \quad (3.3)$$

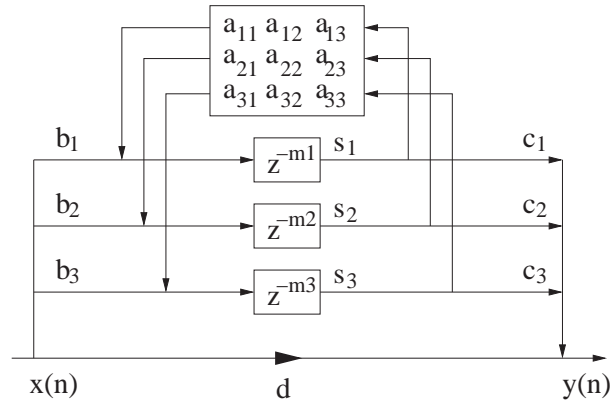


FIG. 3.2 – Un exemple de réseau récursif de lignes à retard d'ordre trois. L'ordre correspond au nombre de lignes à retard prises en compte dans le modèle.

où $\{n_x, n_y, n_z\}$ sont des nombres entiers positifs et c la vitesse du son dans l'air. Ainsi, le triplet $\{n_x, n_y, n_z\}$ caractérise entièrement un mode propre de la pièce. La série harmonique correspondant à ce mode est alors produite par une seule ligne à retard orientée selon une direction spatiale, dont le retard est fixé à $d_n = \frac{1}{f_n}$ avec f_n la fréquence fondamentale de la série harmonique. L'ordre du réseau N est défini en fixant les N fréquences fondamentales les plus basses.

3.1.2 Réseau de guides d'onde numériques

En 1986, J. O. Smith a proposé une méthode de simulation de vibrations de structures multidimensionnelles à partir de ses travaux antérieurs sur les guides d'ondes numériques unidimensionnels. En se basant sur la formulation du schéma des différences finies, il propose de mettre en réseau des guides d'ondes élémentaires [55] [30].

La surface de la structure est maillée en portions élémentaires dans lesquelles la propagation des ondes est simulée par des filtres à retard. Ces filtres élémentaires sont reliés par l'intermédiaire de jonctions. Par ailleurs, des filtres représentant l'atténuation et la dispersion sont répartis ponctuellement et de manière homogène sur l'ensemble du réseau. Ils traduisent les phénomènes de pertes sur la portion séparant deux filtres de pertes voisins.

La géométrie du réseau de guide d'onde est choisie en fonction de celle de l'objet considéré. Elle peut donc être de forme carrée, triangulaire ou hexagonale, comme le montre la figure (3.3) [31].

Le nombre de connections à une jonction est définie comme étant l'ordre du réseau. Elle est par exemple égale à quatre dans le cas d'un réseau carré. Chaque jonction est caractérisée par sa matrice \mathbf{A} appelée matrice de diffusion. Pour une jonction sans pertes, la relation entre les ondes entrantes et les ondes sortantes est donnée par :

$$\mathbf{p}^- = \mathbf{A}\mathbf{p}^+ \quad (3.4)$$

avec \mathbf{p}^+ le vecteur représentant les ondes entrantes (la i ème composante s'écrit $p_i^+ = s_i(n)$) et \mathbf{p}^- le vecteur représentant les ondes sortantes qui quittent la jonction à l'instant n (la i ème composante s'écrit $p_i^- = s_i(n + m_i)$). Si je note N le nombre de branches raccordées à la jonction, \mathbf{A} est une matrice de taille $N \times N$ associée à cette jonction qui a pour rôle de répartir l'énergie entrante à toutes ses sorties tout en imposant qu'il y a conservation de l'énergie.

La méthode peut alors être utilisée pour modéliser des structures tridimensionnelles. Des exemples de réseaux guides d'onde numériques correspondants à ces types de structures sont représentés sur la figure (3.4).

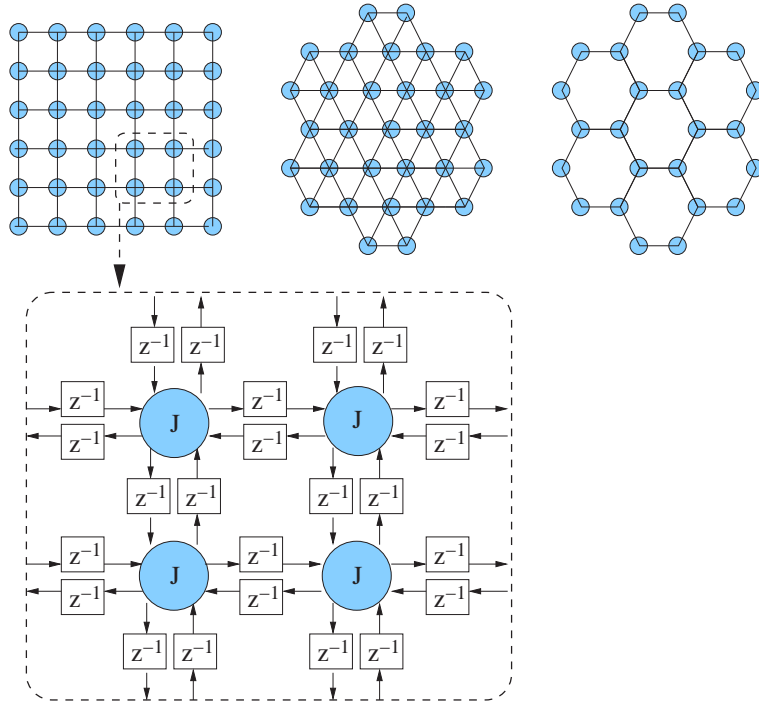


FIG. 3.3 – Trois exemples de réseaux de guides d’onde numériques de structure carrée (à gauche), triangulaire (au centre) et hexagonale (à droite). Chaque ligne comprise entre deux jonctions (points d’intersection entre les lignes) est composée de deux lignes à retard élémentaires traduisant les temps de propagation dans les deux directions, comme le montre l’agrandissement au voisinage d’une jonction dans le cas du réseau carré.

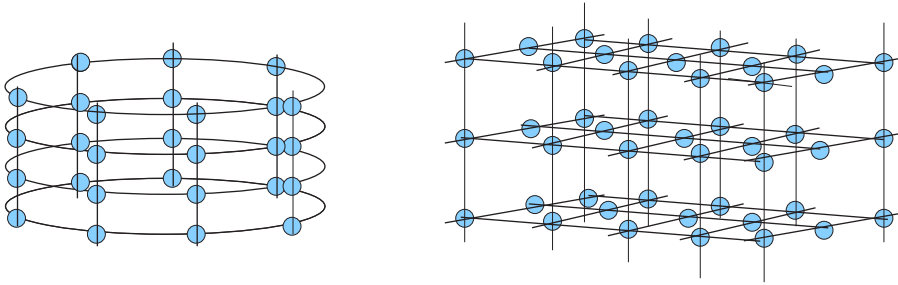


FIG. 3.4 – Schémas génériques de deux exemples de réseaux de guides d’onde numériques pour la simulation de vibrations de structures en trois dimensions : le réseau cylindrique et le réseau carré.

Conditions aux bords

Il arrive souvent que les objets étudiés possèdent des formes géométriques complexes qui rendent difficiles un maillage uniforme de la structure. Ce problème se pose surtout au niveau des bords de l’objet où la forme de la maille périphérique ne correspond pas à la courbure de l’objet.

Le maillage de la zone interne de la structure est alors connecté au bord géométrique de l’instrument par une ligne à retard. Cette ligne représente le temps mis par l’onde pour se réfléchir au bord géométrique de l’objet le plus proche de la jonction, comme le montre la figure (3.5).

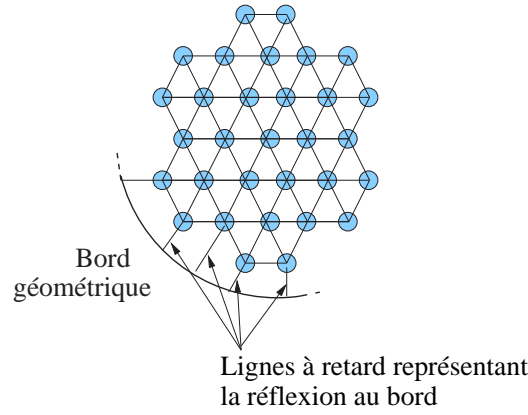


FIG. 3.5 – Après maillage de la surface interne de la structure, les phénomènes de réflexion au bord géométrique sont simulés par des lignes à retard.

Analogie avec la méthode des différences finies

Le concept du réseau de guides d'ondes numériques est basé sur celui des différences finies. Le formalisme consiste à discrétiser l'équation du mouvement (on en déduit une équation aux différences) qui caractérise la structure. Les valeurs des déplacements (ou des vitesses) transversaux sont ensuite calculées à chaque jonction du réseau. Il est alors possible de visualiser l'évolution temporelle de la déformation initiale appliquée à la structure. Dans l'exemple de la membrane rectangulaire, le déplacement transversal noté $u(x,y,t)$ au point (x,y) à l'instant t est régi par l'équation du mouvement suivante :

$$\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial y^2} \right) \quad (3.5)$$

avec c la vitesse de propagation des ondes. Pour une fonction $f(x)$ donnée, l'opération de dérivation seconde est approximée par une formulation aux différences de la forme :

$$f''(x) \approx \frac{f(x + \Delta x) - 2f(x) + f(x - \Delta x)}{\Delta x^2} \quad (3.6)$$

La membrane est modélisée par un réseau carré. A chaque jonction localisée en $\{\ell, m\}$, la vitesse de déplacement $V_{\ell, m}$ à l'instant n peut être calculée :

$$V_{\ell, m}(n) = \frac{V_{1, \ell, m}^+(n) + V_{2, \ell, m}^+(n) + V_{3, \ell, m}^+(n) + V_{4, \ell, m}^+(n)}{2} \quad (3.7)$$

$$V_{i, \ell, m}^-(n) = V_{\ell, m}(n) - V_{i, \ell, m}^+(n) \quad (3.8)$$

avec ℓ et m représentant les indices spatiaux de la jonction et n le numéro d'échantillon temporel. $V_{i, \ell, m}^+(n)$ et $V_{i, \ell, m}^-(n)$ représentent respectivement les ondes entrantes et sortantes de la jonction aux quatre ports. Sachant que les jonctions sont reliées par des lignes à retard unité, la valeur d'entrée d'une jonction au niveau d'un port donné est égal à la valeur de sortie de la jonction voisine à l'instant précédent. La principale difficulté de cette méthode basée sur la discrétisation de la structure, réside dans le choix du maillage du réseau qui peut introduire des erreurs de dispersion numérique plus ou moins importantes. De plus, l'implémentation en temps-réel d'un modèle de synthèse issu de cette méthode ne serait pas envisageable.

Applications du modèle

Ce type de modèle peut être utilisé dans beaucoup de situations. Par exemple, une membrane rectangulaire peut être modélisée par un réseau rectangulaire ou carré de guides d'ondes. On

peut par la suite construire des objets comportant plusieurs éléments par assemblage de différents réseaux.

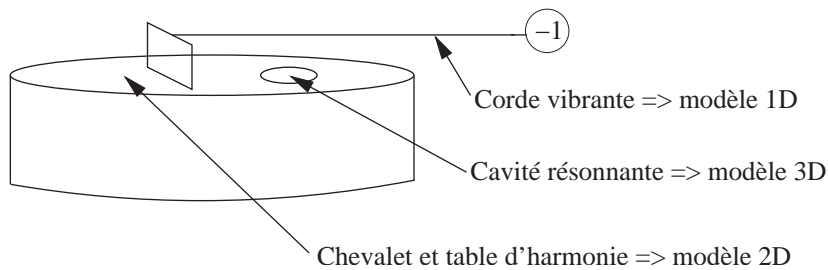


FIG. 3.6 – *Modèle physique d'une guitare à une corde en utilisant le réseau de guides d'onde numériques. La corde est modélisée par un guide d'onde unidimensionnel. Un modèle bidimensionnel est utilisé pour le système {chevalet+table d'harmonie} tandis qu'un modèle tridimensionnel est utilisé pour la cavité résonnante.*

Le schéma représenté sur la figure (3.6) correspond à un modèle de guitare à une corde. La corde est modélisée par un guide d'onde unidimensionnel. Un modèle bidimensionnel est utilisé pour le système {chevalet+table d'harmonie} tandis qu'un modèle tridimensionnel est utilisé pour la caisse de résonance.

Le réseau rectangulaire tridimensionnel permet par ailleurs de reproduire l'effet de réverbération d'une pièce rectangulaire [56]. Ce réseau comporte toutefois une limite car on ne pourra pas reproduire fidèlement la densité modale (nombre de modes dans une bande de fréquences donnée) lorsque les dimensions de la pièce deviennent très importantes. Dans ce cas, il est alors possible de prendre en compte une propriété auditive de l'oreille. En effet, au-dessus d'une fréquence critique appelée limite de Schroeder, il y a un recouvrement de modes. L'oreille ne distingue alors plus de différences audibles même lorsque l'on augmente la densité modale. Cette propriété de l'oreille humaine permet alors d'utiliser ce modèle pour reproduire l'effet de toutes les salles dont les dimensions sont supérieures à une dimension critique (correspondant à la limite de Schroeder).

3.1.3 Modèles guides d'onde numériques par bande

Le réseau de guides d'onde numériques que je viens de présenter, est une méthode de simulation très fidèle, même pour des structures multidimensionnelles assez complexes. Toutefois, la modélisation étant basée sur le schéma des différences finies, l'implémentation numérique coûte très cher en temps de calcul (d'autant plus que la structure est grande) et le pilotage en temps réel de ce modèle est difficilement envisageable. Le guide d'onde numérique par bande, que je vais décrire dans ce paragraphe a été présenté initialement par Essl et Cook [27] [28]. Ce modèle a été proposé dans le cadre de la simulation d'instruments à percussion, en particulier de barres ou de verres frottés (utilisés dans l'Armonica de verre, inventé par B. Franklin). Bien qu'il existe de nombreux travaux sur la corde frottée ou la barre frappée, il n'y a eu aucune étude antérieure sur la barre frottée. La figure (3.7) illustre le modèle proposé par Essl et Cook. La boucle de rétroaction à travers l'excitateur traduit le mécanisme d'interaction entre l'archet et la barre (le système est auto-entretenu).

Le modèle complet consiste donc à sommer autant de guides d'onde par bande que de modes à reproduire. Basé sur le concept de l'analyse modale, on déduit aisément que cette méthode de synthèse n'est applicable que pour des cas où le spectre ne comporte que des résonances marquées, facilement discernables, et peu nombreuses dans un but d'un faible coût de calcul et d'une implémentation en temps réel.

Par ailleurs, le modèle proposé par Essl et Cook n'étant valable que pour des structures simples produisant peu de modes, J. O. Smith a par ailleurs apporté une modification à ce modèle afin de

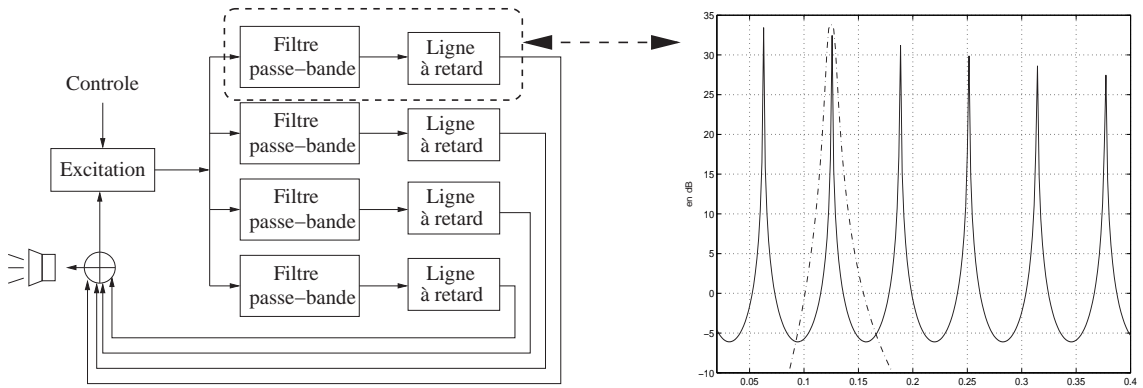


FIG. 3.7 – Concept du réseau de guides d’onde numériques par bande proposé par Essl et Cook. Ici, le modèle comporte quatre lignes à retard. Chaque mode résonant est produit par une boucle de rétroaction composée d’un filtre passe-bande et d’une ligne à retard. La figure de droite représente un spectre de raies produit par la ligne à retard d’une des boucles de rétroaction. Sur ce spectre, la courbe en pointillés correspond au filtre passe-bande placé après la ligne à retard.

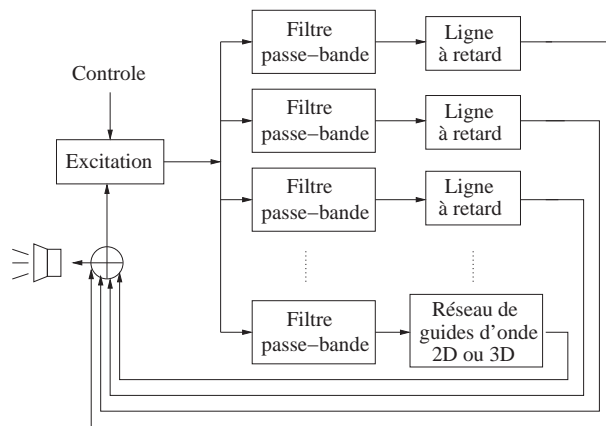


FIG. 3.8 – Réseau de guides d’onde numériques par bande qui permet de reproduire des signaux plus complexes et plus riches spectralement. Par rapport au modèle guides d’onde numériques par bande, la partie du spectre de forte densité modale est modélisée par un réseau de guides d’onde multidimensionnels.

l’utiliser pour reproduire des spectres plus complexes et plus riches [58]. La structure du modèle est représentée sur la figure (3.8). L’idée consiste à utiliser la méthode proposée par Essl et Cook sur les parties du spectre où les résonances sont discernables. Le reste du spectre (où les modes ne sont plus discernables) est alors caractérisé par la densité modale et modélisé par un réseau de guides d’onde dont le principe a été présenté en 3.1.2.

Ce modèle peut être piloté en temps réel. En effet, la modélisation par réseau de guides d’onde qui est très coûteuse en temps de calcul est réduite à la partie hautes fréquences du spectre. L’efficacité de cette méthode repose notamment sur le choix de la fréquence à partir de laquelle on décide de considérer une modélisation par un réseau de guides d’onde.

3.1.4 Le langage CORDIS-ANIMA

Le système CORDIS-ANIMA est un outil de création sonore (CORDIS) et de création d’images animées (ANIMA) [17]. Ce logiciel permet de représenter et de simuler la plupart des objets

physiques du monde naturel susceptibles de produire des sons et des images mais également des objets utilitaires comme des robots ou des instruments de travail (outils du chirurgien par exemple).

Typiquement, un modèle physique CORDIS-ANIMA est construit à partir de modules élémentaires massiques (masse, point fixe) qui sont reliés par des jonctions physiques (ressort, amortisseur, ...) qui permettent de relier ces modules. Ils sont illustrés sur la figure (3.9). Par ailleurs, il existe des modules d'entrée (données provenant de capteurs gestuels, autres sources de fichiers, ...) et de sortie (haut-parleurs, fichier son, ...) qui sont ensuite connectés aux objets créés par CORDIS-ANIMA.

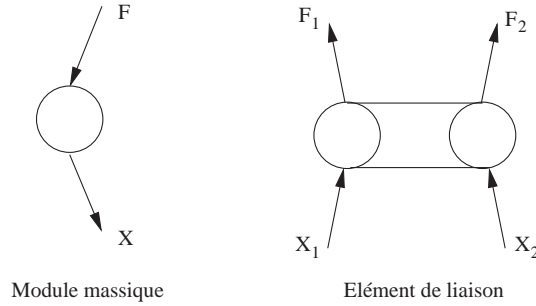


FIG. 3.9 – Atomes CORDIS-ANIMA. Les objets construits par CORDIS-ANIMA sont représentés par assemblage de modules élémentaires massiques (masse, point fixe) qui sont reliés par des éléments de liaison qui peuvent être linéaires et non-linéaires (ressort, amortisseur, ...).

Une équation aux différences est associée à chaque type de modules élémentaires. Ainsi, pour une masse ponctuelle :

$$X(n) = 2X(n-1) - X(n-2) + \frac{F(n-1)}{M} \quad (3.9)$$

pour un ressort :

$$F_2(n) = -F_1(n) = -K(X_2(n) - X_1(n)) \quad (3.10)$$

pour un frottement visqueux :

$$F_2(n) = -F_1(n) = -Z(X_2(n) - X_2(n-1) - X_1(n) + X_1(n-1)) \quad (3.11)$$

avec M la masse, K la raideur et Z le coefficient de viscosité. Il existe également des interactions non-linéaires du type non-linéarité locale (pour simuler des excitations par pincement ou par frottement) ou du type distribution non-linéaire (pour simuler le comportement non-linéaire du matériau). La figure (3.10) montre un exemple de modèle CORDIS-ANIMA représentant une corde de piano tendue, aux extrémités fixes qui est en appui sur un chevalet [16]. La corde est représentée par un assemblage de masses ponctuelles (points noirs) reliées par des ressorts (double points blancs). Ses extrémités sont représentées par deux points fixes (points rayés). Le chevalet est modélisé par une masse plus importante (point de plus grande dimension) et un ressort plus raide (ressort de plus grande dimension). Il est relié à la corde par deux ressorts et son autre extrémité est fixe.

L'équipe de l'ACROE a par ailleurs développé un logiciel appelé GENESIS, un environnement graphique à l'usage des musiciens permettant une utilisation attractive de ce concept CORDIS-ANIMA [20].

3.1.5 La synthèse modale par MODALYS

Marque déposée par l'Ircam et successeur du logiciel MOSAIC, le logiciel MODALYS permet de représenter et de jouer des instruments existants ou imaginaires. MOSAIC a été initialement

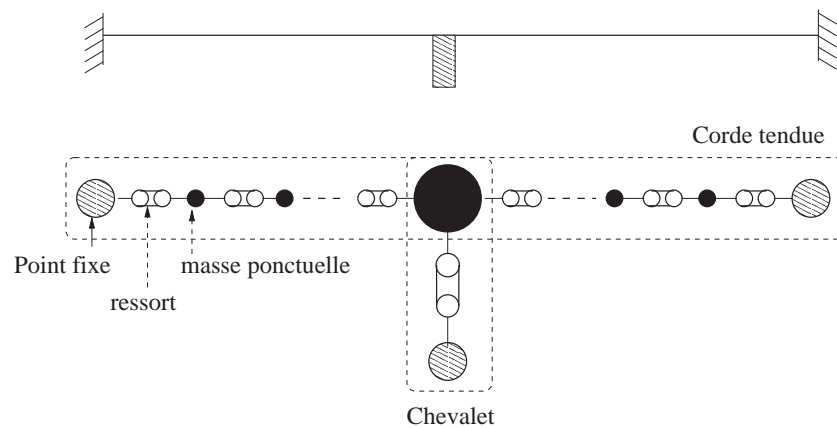


FIG. 3.10 – Exemple d'objet pouvant être créé par CORDIS-ANIMA. Ce modèle représente une corde de piano tendue, aux extrémités fixes qui est en appui sur un chevalet. La corde est représentée par un assemblage de masses ponctuelles (points noirs) reliées par des ressorts (double points blancs). Ses extrémités sont représentées par deux points fixes (points rayés). Le chevalet est modélisé par une masse plus importante (point de plus grande dimension) et un ressort plus raide (ressort de plus grande dimension). Il est relié à la corde par deux ressorts et son autre extrémité est fixe.

conçu par Jean-Marie Adrien [1] [2] dans l'équipe Acoustique Instrumentale, et implémenté par Joseph Morrison [50] [51]. Le concept a ensuite été repris et renommé MODALYS (pour éviter la confusion avec le premier navigateur Internet grand public *Mosaic* créée en 1993) à l'Ircam par R. Caussé, G. Eckel et F. Iovino. Les instruments sont construits par assemblage d'objets élémentaires. Le concept est différent de celui de CORDIS-ANIMA. Dans MODALYS, on associe à un objet élémentaire l'ensemble de ses modes propres et fréquences propres (qui est déduit des paramètres géométriques et mécaniques définis par l'utilisateur), alors que dans CORDIS-ANIMA, le module élémentaire correspond réellement à l'objet qu'il représente. En pratique, l'utilisateur définit un objet modal (qui a un comportement linéaire) qui jouera indifféremment le rôle d'excitateur ou de résonateur. Il va ainsi choisir son type (corde, tube, membrane, plaque, barre ...), ses caractéristiques géométriques (longueur, rayon, épaisseur ...), ses caractéristiques mécaniques (module d'Young, densité, constantes d'amortissement ...) et le nombre de modes pris en compte (ce qui va déterminer le temps de calcul). L'utilisateur définit aussi les interactions et les connexions (pincer, frotter, frapper, souffler, écouter ...) à établir entre chaque objet qu'il a défini précédemment.

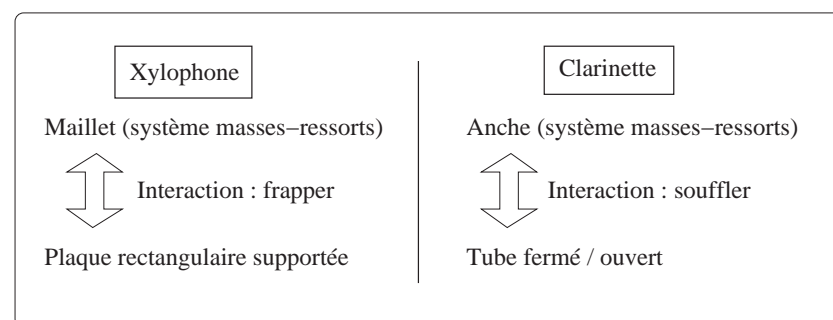


FIG. 3.11 – Construction des modèles physiques de xylophone et de clarinette avec le logiciel MODALYS.

La figure (3.11) représente les synoptiques des modèles de xylophone et de clarinette qui

ont été construits avec MODALYS. L'avantage d'un tel outil réside dans le fait que l'on peut concevoir aisément un instrument qui ne peut pas exister dans la réalité. Il devient alors possible de modéliser des actions du type souffler dans une corde ou bien frapper une colonne d'air. Le contrôle des modèles peut s'effectuer de différentes manières : avec le langage textuel *Scheme*, l'interface graphique Modalys-ER qui est représenté sur la figure (3.12), le protocole MIDI ou bien l'environnement de programmation visuelle OpenMusic¹.

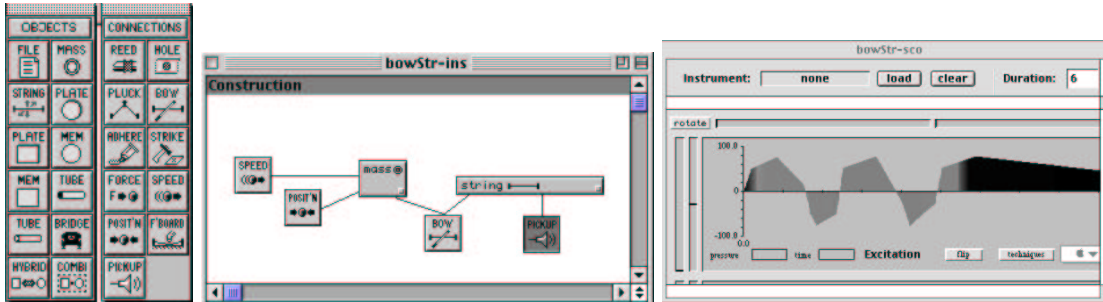


FIG. 3.12 – Les différentes fenêtres de l'interface graphique Modalys-ER permet de choisir les modules élémentaires (fenêtre de gauche), de les assembler (fenêtre du centre) pour construire un modèle de synthèse, puis de contrôler ce dernier (fenêtre de droite).

Cependant, cette méthode étant basée sur la décomposition modale, les objets sont modélisés par assemblage de modules ayant une géométrie et des conditions aux limites simples. Ainsi, les objets de forme complexe nécessitent un grand nombre de modules. Le logiciel MODALYS ne fonctionne pas encore en temps-réel.

3.2 Construction de deux modèles de synthèse

Parmi les modèles de synthèse existants, nous avons vu que fait de coupler des modèles guides d'onde en les rebouclant avec des filtres à retard (paragraphe 3.1.1) ou en les connectant par réseaux (paragraphe 3.1.2), permet de simuler les phénomènes de réverbération d'une pièce ou alors les vibrations de systèmes mécaniques multidimensionnels. Dans ce paragraphe, je propose deux modèles de synthèse basés sur le concept des guides d'ondes numériques. Je décrirai successivement la méthode de construction de chacun des deux modèles puis les méthodes de calage de leurs paramètres par l'analyse de signaux.

3.2.1 Cadre de l'étude

Les modèles de synthèse proposés dans ce paragraphe permettent de reproduire le comportement vibratoire de structures multidimensionnelles simples.

Les modèles sont ensuite utilisés dans le cadre de la simulation de vibrations de la membrane et de la plaque mince. En particulier, les paramètres des modèles seront calés de manière à reproduire leur comportement vibratoire. Toutefois, ils peuvent être utilisés dans la simulation d'autres structures dans la mesure où les solutions analytiques existent. Le choix d'étudier la membrane ou la plaque mince réside dans le fait que nous avons pu effectuer des mesures expérimentales sur des structures réelles et de mettre au point des méthodes d'analyse permettant le calage de paramètres.

1. <http://www.ircam.fr/produits/logiciels/modalys.html>

3.2.2 Construction d'un modèle de guides d'onde numériques couplés

Dans le paragraphe 3.1, nous avons vu que le fait de coupler N modèles guides d'onde numériques en réseau ou par rebouclage, permettait de simuler le comportement vibratoire de structures multidimensionnelles. Le modèle de synthèse proposé dans ce paragraphe est constitué d'une somme de guides d'ondes, comme l'illustre la figure (3.13). Les deux approches sont similaires dans la mesure où le couplage de M guides d'onde est équivalent à sommer M autres guides d'onde. Chaque guide d'onde élémentaire est composé d'une boucle de rétroaction constituée d'un filtre dépendant de la fréquence $G_m(\omega)$. Le signal d'entrée de chaque boucle est multiplié par un gain g_m .

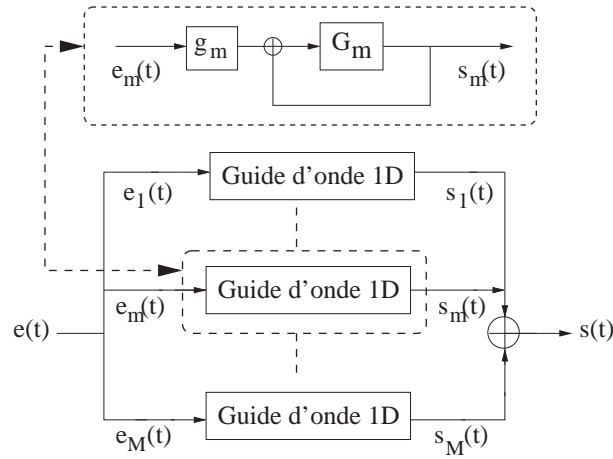


FIG. 3.13 – Construction du modèle de synthèse par sommation de plusieurs guides d'onde numériques. Chaque guide d'onde élémentaire est composé d'une boucle de rétroaction constituée d'un filtre dépendant de la fréquence $G_m(\omega)$. Le signal d'entrée de chaque boucle est multiplié par un gain g_m .

La fonction de transfert $H(\omega)$ du modèle s'écrit alors sous la forme d'une somme de fonctions de transfert élémentaires $h_m(\omega)$. En posant $G_m(\omega) = |G_m(\omega)| e^{-i\phi_m(\omega)}$, la fonction de transfert s'écrit :

$$H(\omega) = \sum_{m=1}^M h_m(\omega) = \sum_{m=1}^M \frac{F_m(\omega)}{1 - |G_m(\omega)| e^{-i\phi_m(\omega)}} \quad (3.12)$$

Le module de $G_m(\omega)$ traduit les phénomènes de dissipation et sa phase $\phi_m(\omega)$ traduit les phénomènes de dispersion ainsi que le temps de propagation. Par rapport à la figure (3.13), le filtre $F_m(\omega)$ est défini par :

$$F_m(\omega) = g_m G_m(\omega) \quad (3.13)$$

Les valeurs des paramètres du modèle $\{F_m(\omega), |G_m(\omega)|, \phi_m(\omega)\}_{m=1,\dots,M}$ peuvent être déduites de grandeurs physiques qui caractérisent le système mécanique. Le nombre de fonctions de transfert à sommer dépend des caractéristiques physiques de la structure, en particulier de sa géométrie. En effet, ce nombre est proportionnel à la taille de la structure (plus cette dernière est grande, plus le nombre de fonctions sera grand).

Réponse impulsionnelle du modèle - Problème direct

De la même manière que dans le cas unidimensionnel, je cherche à définir les paramètres du signal de synthèse à partir de ceux du modèle. Connaissant les valeurs des paramètres du modèle de synthèse, je voudrais déterminer celles qui caractérisent le signal de sortie. Je suppose que

ce signal de sortie s'écrit sous la forme d'une double somme de sinusoides exponentiellement amorties :

$$z(x,y,t) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N a_{mn}(x,y) e^{-\alpha_{mn}t} e^{i\omega_{mn}t} \quad \text{pour } t \geq 0 \quad (3.14)$$

Les paramètres $a_{mn}(x,y)$, ω_{mn} et α_{mn} représentent respectivement l'amplitude, la pulsation propre et le coefficient d'amortissement de la composante mn . Pour déterminer ces paramètres, j'identifie la fonction de transfert $H(\omega)$ du modèle écrite en (3.12) avec la transformée de Fourier de (3.14) :

$$\sum_{m=1}^M \frac{F_m(\omega)}{1 - |G_m(\omega)| e^{-i\phi_m(\omega)}} = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \frac{a_{mn}}{\alpha_{mn} + i(\omega - \omega_{mn})} \quad (3.15)$$

Les résonances produites par chaque fonction de transfert $h_m(\omega)$ sont assez éloignées les unes des autres pour pouvoir supposer que deux résonances successives ne se superposent pas. Cette hypothèse se traduit pas la relation suivante, pour un indice m donné :

$$\frac{a_{mn}}{\alpha_{mn} + i(\omega_{m,n\pm 1} - \omega_{mn})} \approx 0 \quad (3.16)$$

Et par conséquent, je peux écrire pour chaque indice m :

$$\frac{F_m(\omega)}{1 - |G_m(\omega)| e^{-i\phi_m(\omega)}} = \sum_{n=1}^N \frac{a_{mn}}{\alpha_{mn} + i(\omega - \omega_{mn})} \quad (3.17)$$

J'écris localement autour de chaque résonance ω_{mn} , pour $\omega = \omega_{mn} + \varepsilon$:

$$\frac{F_m(\omega_{mn} + \varepsilon)}{1 - |G_m(\omega_{mn} + \varepsilon)| e^{-i\phi_m(\omega_{mn} + \varepsilon)}} = \frac{a_{mn}}{\alpha_{mn} + i\varepsilon} \quad (3.18)$$

J'effectue un développement limité à l'ordre un en ε de la phase $\phi(\omega)$:

$$\phi_m(\omega_{mn} + \varepsilon) \approx \phi_m(\omega_{mn}) + \varepsilon \phi'_m(\omega_{mn}) + O(\varepsilon^2) \quad (3.19)$$

ce qui me permet de réécrire l'expression de l'exponentielle sous la forme :

$$e^{-i\phi_m(\omega_{mn} + \varepsilon)} = e^{-i\phi_m(\omega_{mn}) - i\varepsilon \phi'_m(\omega_{mn})} \approx 1 - i\varepsilon \phi'_m(\omega_{mn}) \quad (3.20)$$

avec $\phi'_m(\omega)$ la dérivée de $\phi_m(\omega)$ par rapport à ω . Je suppose que les modules des fonctions $F_m(\omega)$ et $G_m(\omega)$ ont un comportement régulier localement autour de chaque résonance de manière à pouvoir écrire :

$$\begin{aligned} |F_m(\omega_{mn} + \varepsilon)| &\approx |F_m(\omega_{mn})| \\ |G_m(\omega_{mn} + \varepsilon)| &\approx |G_m(\omega_{mn})| \end{aligned} \quad (3.21)$$

L'égalité (3.18) se réécrit :

$$\frac{F_m(\omega_{mn})}{1 - |G_m(\omega_{mn})| (1 - i\varepsilon \phi'_m(\omega_{mn}))} \approx \frac{a_{mn}}{\alpha_{mn} + i\varepsilon} \quad (3.22)$$

La méthode d'identification terme à terme me permet de déterminer les paramètres de la réponse impulsionnelle du modèle.

$$\begin{cases} a_{mn} = \frac{F_m(\omega_{mn})}{|G_m(\omega_{mn})| \phi'_m(\omega_{mn})} \\ \alpha_{mn} = \frac{1 - |G_m(\omega_{mn})|}{|G_m(\omega_{mn})| \phi'_m(\omega_{mn})} \end{cases} \quad (3.23)$$

Les valeurs des pulsations propres ω_{mn} correspondent aux pôles de la fonction de transfert $H(\omega)$ et par conséquent doivent vérifier la relation suivante :

$$\phi_m(\omega_{mn}) = 2n\pi \quad \text{avec } n \in \mathbb{Z} \quad (3.24)$$

Elles dépendent de l'expression qui est choisie pour la phase $\phi_m(\omega)$.

Détermination des paramètres du modèle à partir de l'analyse de signaux - Problème inverse

En pratique, on est amené à traiter le problème inverse qui consiste à déterminer les paramètres du modèle à partir de l'analyse du signal que l'on cherche à reproduire. Si l'on veut utiliser ce modèle de synthèse pour simuler les vibrations d'une structure donnée, il faut que ce modèle puisse générer un spectre identique comportant les mêmes résonances.

A partir de l'expression de (3.22), je peux déterminer les valeurs des filtres du modèle :

$$\begin{cases} G_m(\omega_{mn}) = \frac{1}{1 + \alpha_{mn}\phi'_m(\omega_{mn})} \\ F_m(\omega_{mn}) = \frac{a_{mn}\phi'_m(\omega_{mn})}{1 + \alpha_{mn}\phi'_m(\omega_{mn})} \end{cases} \quad (3.25)$$

Les valeurs des filtres sont donc connues si les grandeurs ω_{mn} , α_{mn} , a_{mn} et $\phi'_m(\omega_{mn})$ sont connues. Les valeurs de α_{mn} et a_{mn} peuvent être calculées à partir de l'analyse du signal. Les valeurs de ω_{mn} peuvent également être estimées de l'analyse mais dans le cas où la structure est connue, il est alors possible de les calculer de manière analytique. Dans les paragraphes suivants, nous allons voir que l'expression de la phase peut alors être directement déduite de l'expression analytique des fréquences propres de la structure. Seulement deux cas seront traités dans ce qui suit : la membrane rectangulaire encadrée et la plaque mince rectangulaire appuyée. Ce sont des cas où les solutions analytiques sont connues (voir annexe A.1) et la résolution du problème inverse est donc possible. D'autres cas peuvent être traités de la même manière dans la mesure où les fréquences propres de la structure correspondante peuvent être déterminées.

Expression de la phase dans le cas de la membrane rectangulaire En se référant à l'annexe A.1, dans le cas d'une membrane encadrée, les pulsations propres s'écrivent :

$$\omega_{mn} = \sqrt{C_1 m^2 + C_2 n^2} \quad \text{avec} \quad C_1 = \frac{T}{\rho_s} \frac{\pi^2}{L_x^2} \quad \text{et} \quad C_2 = \frac{T}{\rho_s} \frac{\pi^2}{L_y^2} \quad (3.26)$$

Le modèle doit ainsi produire un signal comportant des résonances à ces pulsations ω_{mn} . Pour cela, je suppose que chaque fonction de transfert élémentaire $h_m(\omega)$ engendre les modes de pulsations propres ω_{mn} correspondant à un indice m fixé. Les pulsations concernées sont définies par la relation suivante :

$$\omega_{mn} = \sqrt{C'_1 + C_2 n^2} \quad \text{avec} \quad C'_1 = C_1 m^2 \quad (m \text{ fixé}) \quad (3.27)$$

L'expression de la phase $\phi_m(\omega)$ pour chaque m est déterminée à partir de celle des pulsations propres ω_{mn} . Les résonances correspondant aux pôles de la fonction de transfert $h_m(\omega)$, la phase $\phi_m(\omega)$ doit vérifier la relation suivante à chaque pulsation propre ω_{mn} :

$$\phi_m(\omega_{mn}) = 2n\pi \quad (3.28)$$

J'utilise les expressions (3.27) et (3.28) et j'en déduis :

$$n = \sqrt{\frac{\omega_{mn}^2 - C'_1}{C_2}} \quad \longrightarrow \quad \phi_m(\omega_{mn}) = 2n\pi = 2\pi \sqrt{\frac{\omega_{mn}^2 - C'_1}{C_2}} \quad (3.29)$$

En étendant, par continuité, la définition de $\phi_m(\omega_{mn})$ pour toutes les valeurs de ω , j'obtiens l'expression de $\phi_m(\omega)$:

$$\phi_m(\omega) = 2\pi \sqrt{\frac{\omega^2 - C'_1}{C_2}} \quad (3.30)$$

L'expression de sa dérivée par rapport à ω est donnée par :

$$\phi'_m(\omega) = \frac{2\pi\omega}{\sqrt{C_2(\omega^2 - C'_1)}} \quad (3.31)$$

Expression de la phase dans le cas de la plaque mince rectangulaire Je procède de manière analogue que dans le cas de la membrane rectangulaire. En se référant à l'annexe A.1, dans le cas d'une plaque mince appuyée, les pulsations propres s'écrivent :

$$\omega_{mn} = C_3 m^2 + C_4 n^2 \quad \text{avec} \quad C_3 = \frac{D}{\rho h} \frac{\pi^2}{L_x^2} \quad \text{et} \quad C_4 = \frac{D}{\rho h} \frac{\pi^2}{L_y^2} \quad (3.32)$$

La fonction $h_m(\omega)$ doit alors engendrer les pulsations :

$$\omega_{mn} = (C'_3 + C_4 n^2) \quad \text{avec} \quad C'_3 = C_3 m^2 \quad (m \text{ fixé}) \quad (3.33)$$

J'utilise les expressions (3.33) et (3.28) et j'obtiens celles de la phase et de sa dérivée.

$$\phi_m(\omega) = 2\pi \sqrt{\frac{\omega - C'_3}{C_4}} \quad \longrightarrow \quad \phi'_m(\omega) = \frac{\pi}{\sqrt{C_4(\omega - C'_3)}} \quad (3.34)$$

Prise en compte des points d'excitation et de mesure

Le son produit par une structure dépend évidemment du point d'excitation et du point d'écoute. En effet, en fonction du choix de ces points, on peut amplifier certains modes ou en amortir d'autres. La prise en compte des points d'excitation et de mesure est donc indispensable si l'on veut simuler correctement le son généré par la structure. Je note $\nu_0(x_0, y_0)$ le déplacement initial et $V_0(x_0, y_0)$ la vitesse initiale donnée à la structure au point d'excitation (x_0, y_0) . En coordonnées cartésiennes, le déplacement transversal $u(x, y, t)$ d'une plaque mince rectangulaire de dimensions $L_x \times L_y$ au point (x, y) s'écrit :

$$u(x, y, t) = \sum_{n=1} \sum_{m=1} W_{mn}(x, y) (A_{mn} \cos \omega_{mn} t + B_{mn} \sin \omega_{mn} t) \quad (3.35)$$

avec

$$A_{mn} = \frac{4}{L_x L_y} \iint \nu_0 W_{mn}(x, y) dx dy ; \quad B_{mn} = \frac{2}{\pi \omega_{mn} L_x L_y} \iint V_0 W_{mn}(x, y) dx dy$$

Si j'excite une membrane rectangulaire appuyée aux bords au point (x_0, y_0) avec une impulsion (modélisée par une fonction de Dirac), alors $B_{mn} = 0$ et les modes propres W_{mn} s'écrivent à un point quelconque (x, y) de la plaque :

$$W_{mn}(x, y) = \sin\left(\frac{m\pi x_0}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y_0}{L_y}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) \quad (3.36)$$

Si la mesure s'effectue au point (x_1, y_1) :

$$u(x_1, y_1, t) = \sum_{n=1} \sum_{m=1} A_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x_0}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y_0}{L_y}\right) \sin\left(\frac{m\pi x_1}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y_1}{L_y}\right) \cos \omega_{mn} t \quad (3.37)$$

que je peux réécrire :

$$u(x_1, y_1, t) = \sum_{n=1} \sin\left(\frac{n\pi y_0}{L_y}\right) \sin\left(\frac{n\pi y_1}{L_y}\right) \left[\sum_{m=1} A_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x_0}{L_x}\right) \sin\left(\frac{m\pi x_1}{L_x}\right) \cos \omega_{mn} t \right] \quad (3.38)$$

Le terme entre crochets dans l'expression (3.38) est engendré par un guide d'onde dont la fonction de transfert $H_n(\omega)$ est définie par :

$$H_n(\omega) = \frac{P_n(\omega)}{1 - Q_n(\omega) e^{-i\phi_n(\omega)}} \quad (3.39)$$

et qui produit une somme de composantes sinusoïdales de fréquences propres ω_{mn} et d'amplitude a_{mn} à n fixé définie par :

$$a_{mn} = A_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x_0}{L_x}\right) \sin\left(\frac{m\pi x_1}{L_x}\right) \quad (3.40)$$

Les paramètres $P_n(\omega)$ et $Q_n(\omega)$ sont définis à partir de relations identiques à (3.25). On peut donc réécrire le déplacement de la membrane au point (x_1, y_1) et à l'instant t :

$$u(x_1, y_1, t) = \sum_{n=1} \sin\left(\frac{n\pi y_0}{L_y}\right) \sin\left(\frac{n\pi y_1}{L_y}\right) h_n(x_0, x_1, t) \quad (3.41)$$

avec $h_n(x_0, x_1, t)$ la transformée de Fourier inverse de $H_n(\omega)$. Ainsi, les points d'excitation et de mesure sont pris en compte par une modulation d'amplitude des partiels.

Signaux de synthèse obtenus par le modèle

Les signaux de synthèse obtenus par le modèle seront validés par comparaison avec les signaux obtenus par synthèse additive. Les signaux sont indiscernables d'un point de vue perceptif et les spectres obtenus sont identiques (exemple sonore sur le CD d'accompagnement). Après sommation de toutes les fonctions de transfert élémentaires $h_m(\omega)$, j'obtiens le spectre final correspondant à $H(\omega)$ représenté sur la figure (3.14).

Afin d'obéir à la loi de Shannon, les valeurs maximales M et N des indices m et n sont définies de la manière suivante. Dans le cas de la membrane rectangulaire dont les pulsations propres sont données en (3.26), j'obtiens :

$$\begin{cases} M = \max(m) = \sqrt{\frac{(f_e \pi)^2 - C_2}{C_1}} \\ N = \max(n) = \sqrt{\frac{(f_e \pi)^2 - C_1}{C_2}} \end{cases} \quad (3.42)$$

où f_e est la fréquence d'échantillonnage.

En ordre de grandeur, pour une membrane carrée d'environ 50 cm de côté, il faut prendre en compte une trentaine de guides d'onde élémentaires. Le spectre obtenu en sommant toutes les fonctions de transfert élémentaires possède des résonances qui correspondent aux valeurs exactes des pulsations propres calculées analytiquement.

3.2.3 Construction d'un modèle de synthèse généralisé

Le modèle que je viens de présenter dans le paragraphe précédent est une généralisation au cas multidimensionnel du concept du guide d'onde élémentaire. Il est obtenu par sommation de guides d'onde unidimensionnels. Le deuxième modèle que je propose est constitué d'un seul guide d'onde numérique. La fonction de transfert de ce modèle s'écrit :

$$H(\omega) = \frac{F(\omega)}{1 - G(\omega)e^{-i\phi(\omega)}} \quad (3.43)$$

Il n'y a pas de sommation à effectuer, ce qui constitue un gain en temps de calcul. Nous verrons également que les paramètres de ce modèle peuvent être directement reliés à la densité modale, grandeur qui peut être déterminée de manière analytique dans le cas de la membrane. En effet, nous avons vu dans le paragraphe précédent que le spectre engendré par une structure multidimensionnelle présente une forte densité modale surtout dans les hautes fréquences. Il devient alors

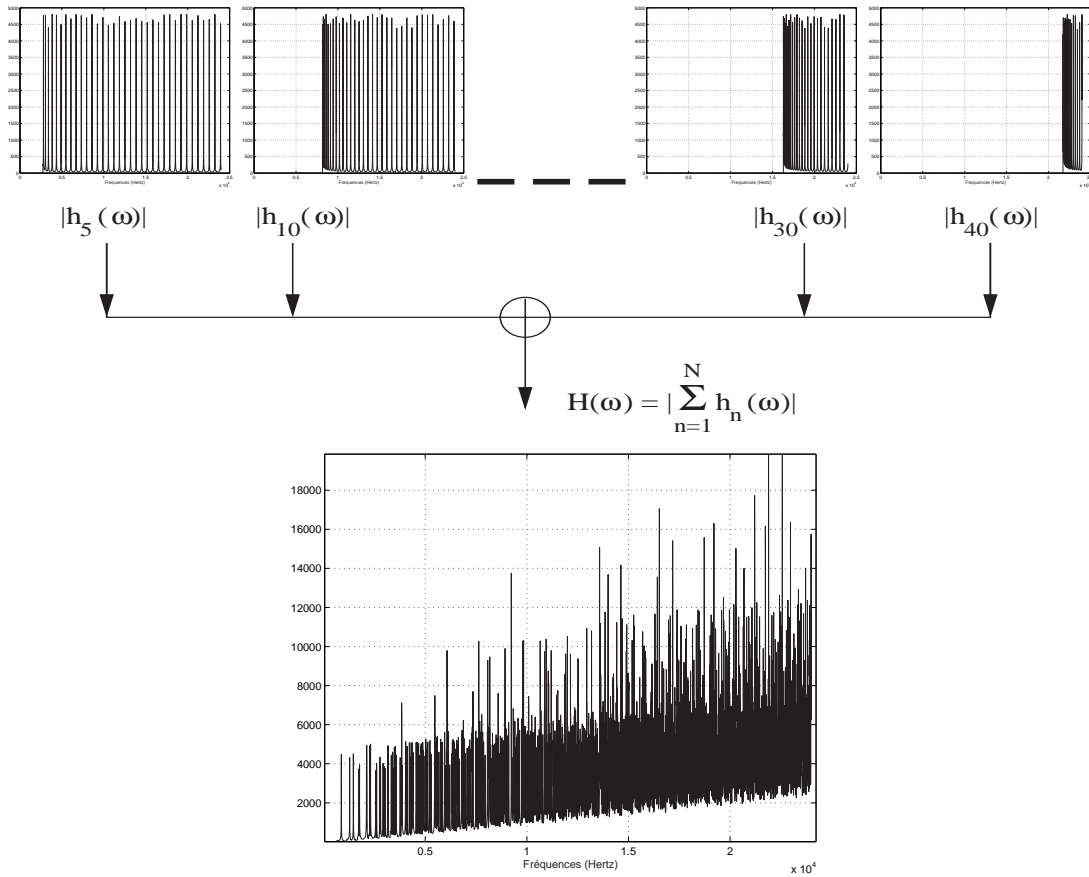


FIG. 3.14 – Le signal de sortie est obtenu en sommant les contributions des guides d'onde unidimensionnels caractérisés par la fonction de transfert $h_m(\omega)$. Le fait que les résonances contenues dans les spectres élémentaires n'ont pas la même amplitude vient de l'échantillonnage. Par contre, l'amplitude du spectre final est plus grande lorsque plusieurs résonances sont très rapprochées.

intéressant d'utiliser une propriété perceptive qui décrit le fait que l'oreille humaine ne fait pas la distinction entre un signal comportant plus de 7 composantes tonales à l'intérieur d'une même bande critique et du bruit. A part pour les premières pulsations, il n'est donc pas impératif de générer exactement les pulsations propres estimées à partir de la théorie vibratoire mais de générer plutôt une densité modale.

Le problème direct (détermination des grandeurs physiques à partir de paramètres du modèle de synthèse) peut être abordé de la même manière que pour le modèle précédent décrit en 3.2.2. On cherche la réponse impulsionnelle du modèle sous la forme d'une double somme de sinusoides exponentiellement amorties :

$$z(x, y, t) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N a_{mn}(x, y) e^{-\alpha_{mn} t} e^{i\omega_{mn} t} \quad \text{pour} \quad t \geq 0 \quad (3.44)$$

Les paramètres $a_{mn}(x, y)$, ω_{mn} et α_{mn} représentent respectivement l'amplitude, la pulsation propre et le coefficient d'amortissement de la composante mn . Puis, en identifiant l'expression de la transformée de Fourier de $z(x, y, t)$ avec la fonction de transfert du modèle de synthèse $H(\omega)$,

on trouve :

$$\begin{cases} a_{mn} = \frac{F(\omega_{mn})}{|G(\omega_{mn})| \phi'(\omega_{mn})} \\ \alpha_{mn} = \frac{1 - |G(\omega_{mn})|}{|G(\omega_{mn})| \phi'(\omega_{mn})} \end{cases} \quad (3.45)$$

Détermination de l'expression de la phase

L'expression de la phase est directement estimée des valeurs des fréquences propres. Elle dépend de la structure considérée. Dans ce paragraphe, je vais successivement déterminer l'expression de la phase dans le cas de la membrane puis dans le cas de la plaque mince.

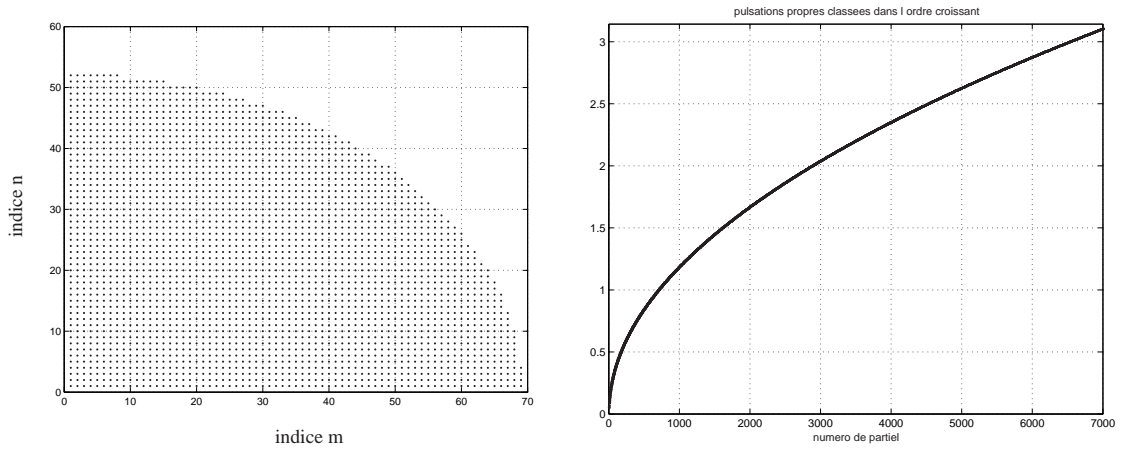


FIG. 3.15 – **Figure de gauche :** Pulsations propres d'une membrane rectangulaire en fonction des indices m et n . Dans cet espace, les pulsations sont localisées à l'intérieur du quart supérieur d'une ellipse d'axes principaux $M = \max(m)$ et $N = \max(n)$. **Figure de droite :** Pulsations propres d'une membrane rectangulaire classées dans l'ordre croissant de leur valeur. Ces valeurs sont normalisées entre 0 et π par rapport à la fréquence d'échantillonnage.

Cas de la membrane La figure de gauche de (3.15) représente toutes les pulsations ω_{mn} en fonction des indices m et n pour un ensemble de valeurs donné. Dans ce repère, on peut voir que les pulsations sont localisées à l'intérieur du quart supérieur d'une ellipse d'axes principaux $M = \max(m)$ et $N = \max(n)$. Ces pulsations sont ensuite classées dans l'ordre croissant de leur valeur. Désormais, elles ne sont indexées que d'un seul indice que je note k . La figure de droite de (3.15) représente la fonction $\omega_k(k)$. Il est intéressant de noter que la densité de modes augmente avec la fréquence. Cette fonction est inversible puisqu'elle est monotone. J'obtiens alors la courbe discrète $k(\omega_k)$. Si je multiplie cette courbe par 2π , j'obtiens directement la courbe correspondant à la phase $\phi(\omega)$ telle que $\phi(\omega_k) = 2k\pi$. Par construction du modèle de synthèse, la phase est égale à $2k\pi$ à la valeur d'une résonance ω_k , comme sur la figure (3.16). La courbe obtenue peut être interpolée par une parabole, ce qui justifie l'expression de la phase sous la forme d'un polynôme d'ordre deux en ω :

$$\phi(\omega) = a\omega^2 + b\omega + c \quad (3.46)$$

Les coefficients $\{a, b, c\}$ de la phase sont déterminés à partir de l'interpolation de cette courbe discrète obtenue avec les valeurs des pulsations propres. La figure (3.16) montre l'estimation de la phase effectuée pour une configuration donnée.

Les premières composantes étant les plus importantes d'un point de vue perceptif, il est par conséquent nécessaire d'imposer une contrainte à l'estimation de la parabole de passer par les

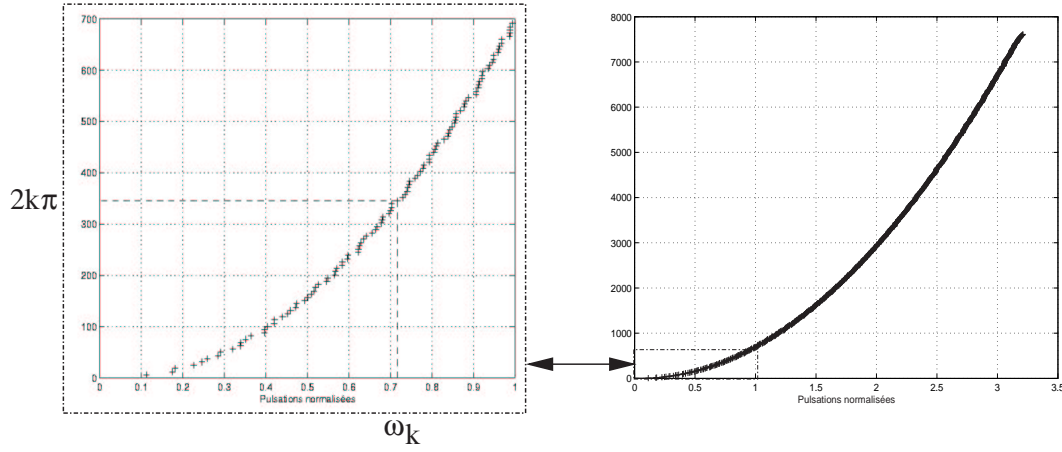


FIG. 3.16 – **Figure de gauche :** Inversion de la courbe représentant les valeurs des pulsations en fonction de leur indice multipliée par 2π . L'exemple en trait pointillé montre qu'à la pulsation ω_k , la valeur à l'ordonnée est égale à $2k\pi$. **Figure de droite :** Estimation de la phase à partir des valeurs des pulsations propres. La courbe continue interpole la courbe discrète (en croix) définie par les valeurs des pulsations propres classées par l'ordre croissant.

valeurs des deux premières fréquences du spectre. Dans le cas particulier de la membrane, il existe une propriété qui permet de déterminer analytiquement les valeurs des coefficients de la phase tout en imposant les contraintes nécessaires. Cette propriété énonce que la densité spectrale de modes (nombre de partiels dans une intervalle de fréquences $\Delta\omega$ donnée) varie linéairement en fréquences et qu'elle s'écrit de manière explicite en fonction des grandeurs physiques [52] :

$$N_{\Delta\omega} = \frac{\sigma L_x L_y}{2\pi T} \omega \Delta\omega \quad (3.47)$$

avec L_x et L_y sont les dimensions de la membrane, T la tension qui lui est appliquée et σ la masse surfacique. Du point de vue du modèle de synthèse, cette grandeur $N_{\Delta\omega}$ correspond exactement au nombre de fois où la phase est égale à un multiple de 2π dans l'intervalle de fréquences $\Delta\omega$ puisqu'une résonance correspond au fait que la phase est égale à un multiple de 2π . Ainsi, dans l'intervalle $[\omega; \omega + \Delta\omega]$, le nombre de résonances $N_{\Delta\omega}$ est égal à :

$$N_{\Delta\omega} = \frac{\phi(\omega_k + \Delta\omega) - \phi(\omega_k)}{2\pi} \quad (3.48)$$

Par ailleurs, la dérivée de la phase peut être approximée par :

$$\phi'(\omega_k) \approx \frac{\phi(\omega_k + \Delta\omega) - \phi(\omega_k)}{\Delta\omega} \quad (3.49)$$

Donc :

$$\phi'(\omega_k) = 2a\omega_k + b \approx \frac{\sigma L_x L_y}{T} \omega_k \quad (3.50)$$

Je peux ainsi relier explicitement le coefficient a de l'expression de la phase (3.46) avec cette grandeur $N_{\Delta\omega}$. Les autres coefficients $\{b, c\}$ sont fixés en imposant deux contraintes sur le mode fondamental et le deuxième partiel, tels que :

$$\begin{cases} \phi(\omega_1) = 2\pi \\ \phi(\omega_2) = 4\pi \end{cases} \quad (3.51)$$

Le système est soluble et j'obtiens l'expression des trois coefficients de la phase :

$$\begin{cases} a = \frac{\sigma L_x L_y}{2T} \\ b = \frac{2\pi - a(\omega_2^2 - \omega_1^2)}{\omega_2 - \omega_1} \\ c = \frac{2\pi(2\omega_1 - \omega_2) - a\omega_1\omega_2(\omega_2 - \omega_1)}{\omega_1 - \omega_2} \end{cases} \quad (3.52)$$

Il n'est donc pas nécessaire de calculer toutes les valeurs des pulsations propres. Il suffit de connaître les paramètres physiques $\{T, L_x, L_y, \sigma\}$ et les valeurs des deux premières pulsations propres pour déterminer entièrement les coefficients de la phase.

Cas de la plaque mince Lorsque je classe les valeurs des pulsations propres d'une plaque mince rectangulaire en appuis simples, j'obtiens la courbe représentée sur la figure (3.17). L'allure générale de la courbe est une droite et non une parabole. Ainsi, contrairement au cas de la membrane, la phase va donc s'exprimer sous la forme d'un polynôme d'ordre un en ω :

$$\phi(\omega) = a\omega + b \quad (3.53)$$

L'estimation des coefficients de la phase a et b peut s'effectuer par simple régression linéaire ou à partir de la densité modale que l'on peut déterminer de manière analytique.

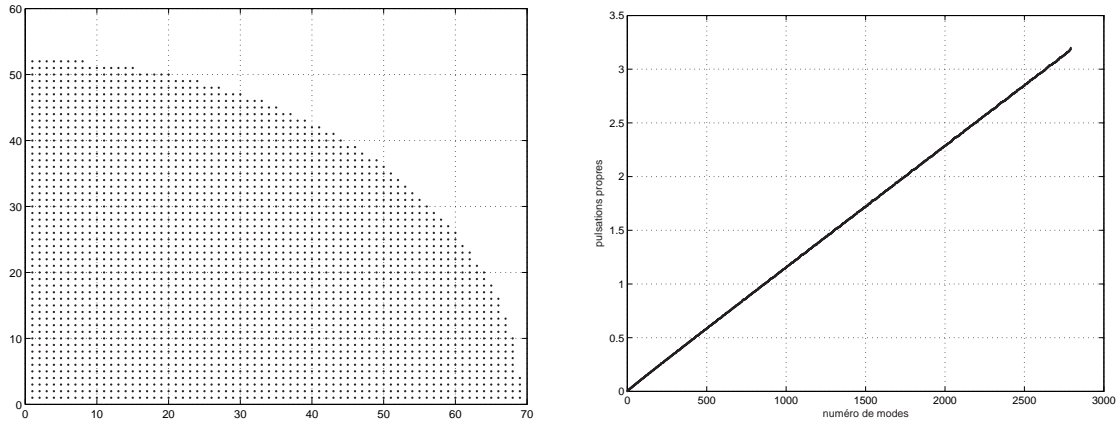


FIG. 3.17 – **Figure de gauche :** Pulsations propres d'une plaque mince rectangulaire en appuis simples en fonction des indices m (en abscisses) et n (en ordonnées). **Figure de droite :** Valeurs de ces pulsations classées dans l'ordre croissant de leur valeur en fonction de leur indice.

Il faut toutefois ajouter une phase aléatoire car un guide d'onde ayant une phase linéaire en fréquence produit un spectre harmonique, ce qui n'est pas le cas pour une plaque mince. Cette phase aléatoire est définie de la manière suivante. A partir de l'ensemble des pulsations propres $\{\omega_k\}$, les coefficients de la phase a et b sont déterminés par la méthode des moindres carrés. Je cherche à minimiser la somme suivante :

$$\sum_k |\omega_k - (ak + b)|^2 \quad (3.54)$$

La séquence $u_k = \omega_k - (ak + b)$ est considérée comme un signal aléatoire qui peut être caractérisé par exemple par ses deux premiers moments (moyenne et variance). Comme dans le cas de la membrane, il reste la possibilité de modifier le paramètre b de façon à ce que la première fréquence soit exacte.

Problème inverse

Pour obtenir les expressions des filtres $F(\omega)$ et $G(\omega)$, la démarche est la même que pour les relations (3.25), ce qui donne :

$$\begin{cases} |G(\omega)| = \frac{1}{1 + L_{amort}(\omega)\phi'(\omega)} \\ F(\omega) = \frac{L_{ampli}(\omega)\phi'(\omega)}{1 + L_{amort}(\omega)\phi'(\omega)} \end{cases} \quad (3.55)$$

où $L_{amort}(\omega)$ représente la loi d'amortissement déduite de toutes les valeurs de α_k et $L_{ampli}(\omega)$ la loi d'amplitude déduite de toutes les valeurs de a_k . Je suppose que ces lois dépendent de la fréquence.

3.2.4 Comparaison entre les deux modèles de synthèse

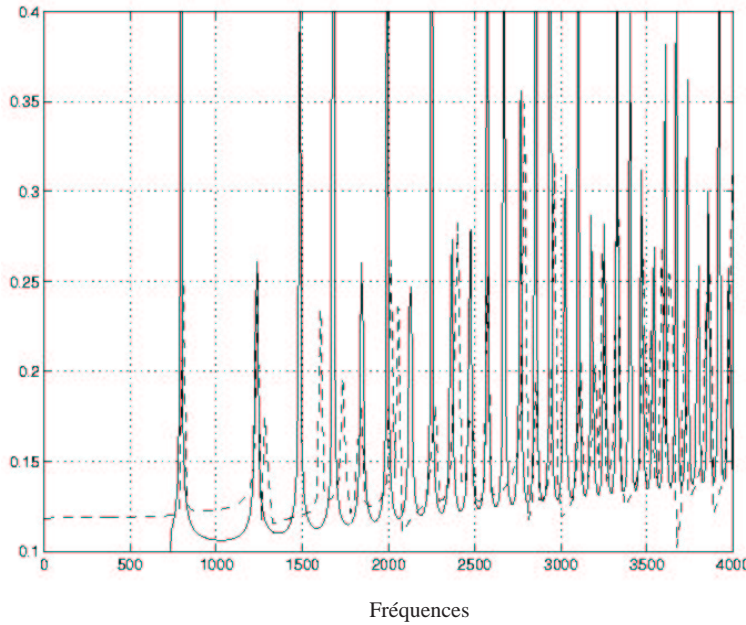


FIG. 3.18 – Spectres des signaux de sortie du premier modèle de synthèse (en trait plein) et du deuxième modèle (en pointillés). Un spectre identique à celui tracé en pointillés est obtenu par une méthode de synthèse additive.

La figure (3.18) représente les spectres engendrés par les deux modèles de synthèse décrits dans les paragraphes précédents pour un ensemble de paramètres initiaux identiques [8]. Exceptés les deux premières résonances, les spectres ne sont pas identiques. En revanche, les sons de synthèse sont tout à fait semblables d'un point de vue perceptif. Le modèle guide d'onde généralisé ne reproduit pas exactement les modes de résonance prédits par la théorie mécanique (par contre, le premier modèle les reproduit exactement) mais les différences ne sont pas perceptibles à l'oreille. A part pour les premières fréquences, l'oreille est donc plus sensible à la densité modale qu'aux valeurs exactes des fréquences contenues dans le spectre.

D'un point de vue numérique, les deux méthodes de synthèse nécessitent peu de temps de calcul. Elles sont exécutées en quelques secondes voire pour de grandes structures, quelques minutes. Grâce au fait que dans le modèle guide d'onde généralisé, il n'est pas nécessaire de sommer toutes les fonctions de transfert, le temps de calcul est nettement réduit.

3.3 Calage du modèle de synthèse par l'analyse de signaux expérimentaux

Les paramètres du modèle de synthèse peuvent être estimés à partir de grandeurs issues de l'analyse du signal à reproduire. Pour cela, il est nécessaire de mettre au point une méthode d'analyse permettant d'estimer les grandeurs nécessaires.

D'après les relations données dans le paragraphe 3.2.2 dans le cas du modèle de guides d'ondes numériques couplés et dans le paragraphe 3.2.3 dans le cas du modèle guide d'onde généralisé, les paramètres de synthèse sont déduits de la tension ou les modules d'élasticité. Dans la pratique, il est souvent difficile de pouvoir identifier ces grandeurs à partir de la structure. Par ailleurs, les conditions réelles d'expérimentations ne sont jamais identiques aux hypothèses du modèle de synthèse correspondant. En particulier, il est difficile de reproduire de manière exacte les conditions aux limites d'encastrement ou d'appuis simples. De plus, la membrane rectangulaire idéale n'est pas réalisable en pratique. Toutes ces considérations m'ont amené à mettre au point une méthode de calage des paramètres d'un modèle de synthèse donné en cherchant à me rapprocher des solutions réelles du problème par une technique d'optimisation. Cette méthode permet ainsi de déterminer un ensemble de paramètres optimaux de sorte que le son produit par le modèle de synthèse soit identique au son de référence d'un point de vue perceptif.

J'ai choisi de considérer dans un premier temps, le modèle de synthèse le plus simple de membrane rectangulaire. Le calage par optimisation va me permettre de déterminer les paramètres d'une membrane rectangulaire équivalente à la structure réelle qui a produit le son. La membrane équivalente ne possédera pas les mêmes caractéristiques mécaniques mais le son produit sera identique d'un point de vue perceptif.

Une telle méthode d'estimation des paramètres évite d'effectuer une modélisation fidèle d'une structure complexe et d'utiliser de manière pertinente un modèle de synthèse simple dont l'implémentation est peu coûteuse.

3.3.1 Protocole expérimental

Afin de mettre au point la méthode de calage du modèle de synthèse, une base de données expérimentales a été constituée. Un banc d'essai a donc été mis en œuvre. Il est constitué d'un cadre rectangulaire en bois dans laquelle des structures minces peuvent être facilement encastrees aux quatre bords à l'aide de serre-joints placés régulièrement le long du cadre. Etant donné que le modèle de synthèse à valider est associé à une membrane rectangulaire, une bâche a été tendue puis fixée par les serre-joints sur le cadre de manière à reproduire les conditions idéales d'une membrane tendue encastree aux quatre bords. La tension appliquée n'est pas connue. La bâche a été excitée par un maillet.

Les vibrations transversales ont été mesurées avec un accéléromètre de faible poids dont les caractéristiques sont décrits dans l'annexe B. Le choix des points d'excitation et de mesure sont déterminants dans la qualité des signaux expérimentaux. En fonction de ces points, je peux annuler certains modes de résonance ou en favoriser d'autres. Ainsi, pour ne pas perdre le mode fondamental sans pour autant négliger les modes pairs, les points d'excitation et de mesure ont été choisis au voisinage du centre de la plaque.

A partir de ces signaux expérimentaux, un processus de calage des paramètres du modèle a été mis au point par processus de minimisation.

3.3.2 Calage des paramètres du modèle

Les lois d'amortissement ont été déterminées directement à partir de l'analyse du signal. Les paramètres physiques initiaux du modèle de synthèse qui déterminent les valeurs des paramètres du modèle sont estimés dans un second temps en utilisant une méthode d'optimisation. L'ensemble

de paramètres optimaux à déterminer sont la tension T , la masse surfacique ρ_s et les dimensions de la membrane (longueur L_x , largeur L_y). La loi d'amortissement étant directement estimée de l'analyse, le calage va ainsi concerner la valeur des pulsations propres. Dans l'expression des pulsations propres de la membrane rectangulaire écrit en (A.5), il est intéressant de noter que seul le rapport entre la tension et la masse surfacique est important. Ce rapport est défini par :

$$C = \pi \sqrt{\frac{T}{\rho_s}} \quad (3.56)$$

La méthode consiste à minimiser l'erreur quadratique entre les valeurs des pulsations propres contenues dans le signal mesuré et les résonances engendrées par le modèle de synthèse.

En pratique, la première étape consiste à estimer les pulsations propres $\{\tilde{\omega}_k\}$ mesurées à partir de méthodes d'analyse du signal décrites dans le chapitre 1. D'après son expression en (3.46), la phase du modèle de synthèse est par construction, déduite des pulsations propres qu'il doit produire. Ainsi, pour un ensemble de pulsations propres $\{\tilde{\omega}_k\}$ mesurées, on cherche à minimiser l'erreur quadratique entre la phase $\Phi(\omega)$ et la courbe obtenue par les pulsations mesurées. Sachant que les premières pulsations sont perceptivement les plus importantes, il est alors nécessaire d'imposer une contrainte sur la phase qui la forcerait à passer par la pulsation fondamentale estimée $\tilde{\omega}_1$. Cette contrainte se traduit par :

$$\tilde{\omega}_1 = C \sqrt{\frac{1}{L_x^2} + \frac{1}{L_y^2}} \quad (3.57)$$

Pour un ensemble de valeurs initiales de L_x et L_y , le paramètre C sera donc défini par :

$$C = \frac{\tilde{\omega}_1}{\sqrt{\frac{1}{L_x^2} + \frac{1}{L_y^2}}} \quad (3.58)$$

Une fois cette contrainte imposée, on cherche à minimiser l'erreur quadratique

$$\sum_k |\tilde{\omega}_k - \omega_k|^2$$

entre les pulsations déterminées par la phase $\Phi(\omega)$ et les pulsations mesurées $\{\tilde{\omega}_k\}$. La minimisation donne ainsi des valeurs optimales des dimensions L_x et L_y de la membrane équivalente.

3.3.3 Résultats de calage

La figure (3.19) montre l'estimation de la phase du modèle de synthèse à partir des valeurs expérimentales des pulsations propres. A part pour la première pulsation, la phase ne passe pas exactement par toutes les valeurs mesurées.

Le modèle de synthèse reproduit la réponse impulsionnelle de la structure. Par conséquent, il est nécessaire de déterminer la bonne excitation à fournir en entrée du modèle afin de pouvoir comparer le son réel et le son de synthèse. Cette excitation est définie en estimant l'enveloppe spectrale du signal de mesure. Il suffira ensuite de convoluer la transformée de Fourier inverse de cette enveloppe par la réponse impulsionnelle du modèle de synthèse.

Les méthodes d'estimation d'enveloppes spectrales sont nombreuses. Une première technique est la méthode cepstrale qui est utilisée dans la synthèse vocale.

Comme le montre la figure (3.20), on suppose que le spectre du signal considéré est le résultat du produit entre un spectre résonant E et d'une enveloppe H :

$$S(\omega) = E(\omega)H(\omega) \quad (3.59)$$

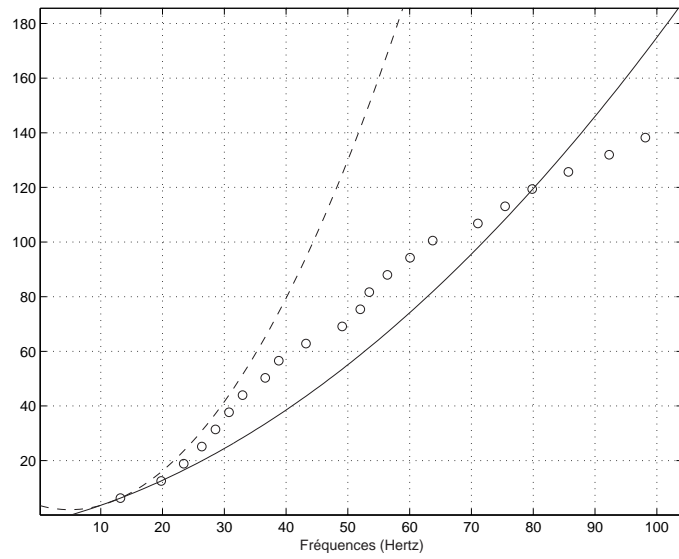


FIG. 3.19 – La phase optimale (courbe en trait plein) est obtenue en minimisant l'erreur quadratique entre les pulsations mesurées (en ronds) et les pulsations données par le modèle. La phase initiale est représentée en traits pointillés.

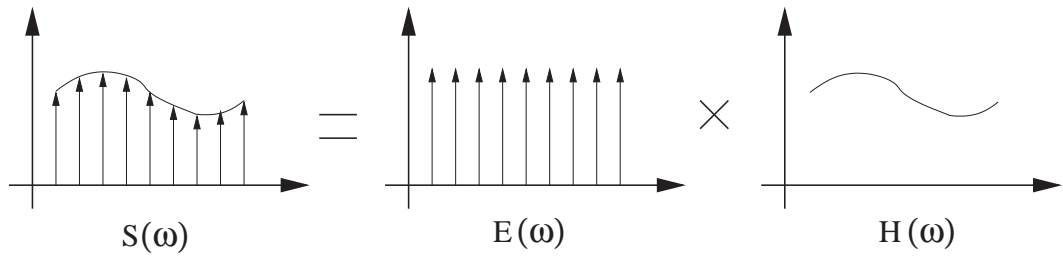


FIG. 3.20 – Méthode du cepstre : on suppose que le spectre du signal considéré S est le résultat du produit entre un spectre résonant E et d'une enveloppe H . Cette méthode permet d'extraire l'enveloppe spectrale dans la mesure où la fréquence de modulation de H est petite devant la fréquence de résonance la plus basse contenue dans E .

Afin de pouvoir distinguer l'enveloppe du spectre, il est important de supposer que la fréquence de modulation de l'enveloppe H est basse devant la fréquence de résonance la plus basse contenue dans le spectre E . Dans le domaine temporel, ce signal s'écrit donc à l'échantillon n comme un produit de convolution entre les transformées de Fourier inverse de E et de H que l'on note respectivement e et h :

$$s(n) = (e * h)(n) \quad (3.60)$$

L'astuce de cette méthode consiste à exprimer la relation (3.59) sous forme logarithmique :

$$\ln(|S|) = \ln(|E|) + \ln(|H|) \quad (3.61)$$

Les coefficients du cepstre sont ensuite définis de la manière suivante :

$$c(q) = \mathcal{T}_{\mathcal{F}}^{-1}\{\ln(|S|)\} \quad (3.62)$$

La notation $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}^{-1}$ représente la transformée de Fourier inverse. La variable q est appelée *quefrences*. L'hypothèse de la faible modulation de H permet d'associer les coefficients de basses *quefrences* à l'enveloppe spectrale et ceux restants au spectre résonant.

L'enveloppe spectrale est donc définie de la manière suivante :

$$E(\omega) = \exp\{\mathcal{T}_{\mathcal{F}}\{w(q)c(q)\}\} \quad (3.63)$$

avec

$$w(q) = \begin{cases} 1 & \text{si } q < q_c \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.64)$$

La fonction $w(q)$ permet de ne garder que les valeurs de coefficients inférieurs à une certaine valeur de coupure q_c .

Le signal temporel déconvolué s'écrit donc :

$$\tilde{s}(t) = \mathcal{T}_{\mathcal{F}}^{-1}\{e^{c(\omega)}\} \quad \text{avec} \quad c(\omega) = \mathcal{T}_{\mathcal{F}}\{c(q)\} \quad (3.65)$$

L'étape délicate de cette méthode consiste à déterminer la valeur de la *quefrency* de coupure q_c .

L'enveloppe spectrale peut par ailleurs être estimée directement à partir du signal mesuré, en interpolant la courbe obtenue par les valeurs d'amplitude des principales résonances contenues dans le spectre. La bonne excitation à fournir à l'entrée du modèle de synthèse est obtenue en calculant la transformée de Fourier inverse de cette enveloppe après avoir préalablement imposé le fait que toutes les phases initiales soient à zéro. La figure (3.21) représente les résultats d'estimation de l'enveloppe spectrale du signal mesuré par interpolation des amplitudes des résonances contenues dans le spectre et par la méthode cepstrale.

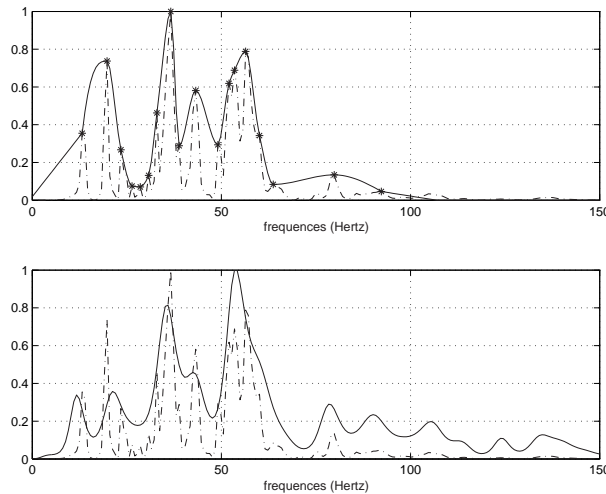


FIG. 3.21 – Estimation de l'enveloppe (en trait plein) du module du spectre mesuré (en traits pointillés) par interpolation des amplitudes des résonances contenues dans le spectre (figure du haut) et par la méthode cepstrale (figure du bas). Dans la figure du haut, les résonances pris en compte sont repérées par des astérisques (*). Pour la méthode cepstrale, la valeur de la quefrency de coupure est 1/15 secondes.

Dans mon cas, la fréquence fondamentale du spectre de mesure est très basse fréquence, ce qui limite les possibilités de la méthode cepstrale. J'ai donc choisi d'estimer l'enveloppe spectrale puis le signal d'excitation adéquat par la méthode d'interpolation des amplitudes. La figure (3.22) montre les modules des spectres du signal mesuré (en trait plein) et du son de synthèse (en traits pointillés).

Les résultats obtenus m'ont permis de déterminer certaines limitations de cette méthode de calage. J'ai par ailleurs voulu savoir s'il était possible d'approcher le comportement vibratoire

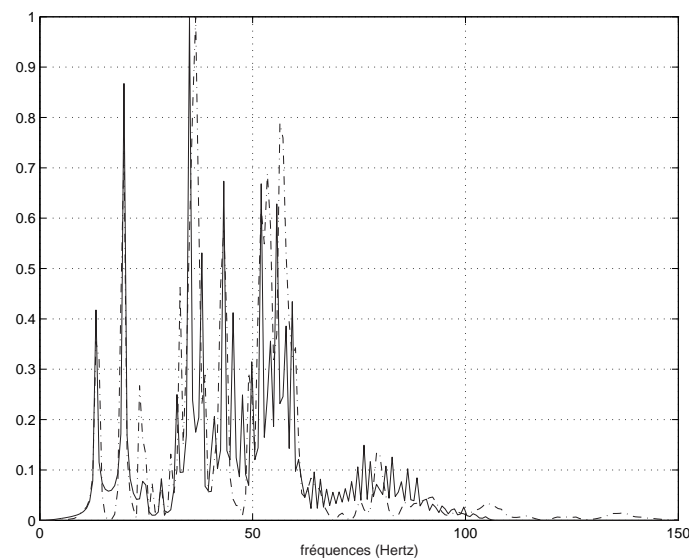


FIG. 3.22 – Modules du spectre du signal mesuré (en traits pointillés) et du spectre du son de synthèse (en trait plein). Les résonances pris en compte sont repérées par des astérisques (*).

de n'importe quelle structure complexe avec celui d'une membrane rectangulaire, toujours du point de vue perceptif. Le processus d'optimisation permet de déterminer les caractéristiques d'une membrane rectangulaire équivalente à la structure étudiée. Toutefois, les paramètres initiaux doivent être relativement proches des propriétés mécaniques et géométriques de la structure réelle. En particulier, j'ai effectué des mesures expérimentales sur des plaques minces rectangulaires, de manière à considérer des structures relativement simples tout en étant différentes des membranes. J'ai ensuite voulu déterminer un modèle de membrane rectangulaire équivalente qui était capable de simuler le comportement vibratoire d'une plaque mince en utilisant un processus d'optimisation (voir article dans l'annexe E).

Les résultats obtenus m'ont permis de déterminer les limitations de cette méthode de calage. En particulier, la difficulté a consisté à déterminer un bon critère d'optimisation. On ne peut plus effectuer de minimisation sur la phase du filtre comme dans le cas de la membrane, sachant que l'interpolation des valeurs de fréquences propres mesurées devient inefficace. Un critère énergétique a pu être testé, qui a consisté à minimiser l'erreur quadratique d'énergie entre les spectres de mesure et de synthèse. Mais, comme tout processus d'optimisation, les résultats obtenus dépend fortement des conditions initiales choisies.

Conclusions sur ce chapitre

Dans ce chapitre, j'ai tout d'abord présenté les principales méthodes existantes de simulation de structures bidimensionnelles. J'ai ensuite proposé deux méthodes de synthèse basées sur le concept de guides d'ondes numériques. Les paramètres de ces modèles sont directement définis à partir de grandeurs physiques qui caractérisent les solutions analytiques de l'équation du mouvement correspondant à la structure. Ces grandeurs sont la tension, la masse surfacique, la géométrie et la loi d'amortissement. Dans les cas où toutes ces grandeurs sont connues, le modèle est aisément mis en œuvre. Par contre, dans le cas où les solutions analytiques ne sont pas connues, les paramètres ne peuvent pas être déterminés de manière explicite. J'ai par la suite voulu repousser cette limitation du modèle en proposant une méthode de calage des paramètres du modèle de synthèse par optimisation à partir de l'analyse du signal à reproduire.

Chapitre 4

Cas de structures complexes

Les modèles de synthèse que j’ai proposés dans les chapitres précédents sont basés sur une modélisation physique de la structure qui a produit le son. Je me propose maintenant d’étendre le domaine d’étude et d’établir une méthode de simulation des sons impulsifs sur des structures complexes dont on a accès uniquement au signal produit.

Nous avons pu constater que les modèles de synthèse basés sur les résultats analytiques issus de la mécanique vibratoire ne sont applicables que pour quelques cas simples. Si l’on veut pouvoir simuler le plus grand nombre de cas possibles avec le modèle de synthèse, il sera alors nécessaire de considérer un modèle dont les paramètres seront définis à partir de la seule source d’information que l’on a, c’est-à-dire, le signal lui-même. La mise en œuvre d’une telle méthode de simulation permet donc de traiter à priori n’importe quel signal impulsif. La connaissance de la structure émettrice du signal n’est donc pas nécessaire.

Le modèle de synthèse correspondant à des structures complexes ne peut généralement plus être basé sur les résultats de la théorie mécanique, mis à part une pure résolution numérique des équations du mouvement (dans l’hypothèse où elles peuvent être établies) qui est généralement très coûteuse en temps de calcul. Toutefois, à défaut de pouvoir exploiter les résultats que peut nous fournir la théorie mécanique, le signal lui-même constitue une base de données suffisante sous réserve que l’on puisse y accéder. Dans cette base de données, il faut pouvoir effectuer une sélection qui se basera sur des critères importants pour la perception, le but étant de reproduire un son qui soit satisfaisant pour l’oreille humaine. Ainsi, en prenant compte des principales caractéristiques physiques et perceptives que j’ai définies dans le chapitre 1, je présenterai la mise en œuvre du modèle de synthèse qui sera basé sur ces critères. Dans un second temps, je proposerai une méthode de calage des paramètres du modèle à partir de l’analyse du signal à reproduire.

4.1 Construction du modèle de synthèse

Le modèle de synthèse que je propose dans ce paragraphe concerne la simulation de sons produits par des structures complexes. La construction de ce modèle ne nécessite pas la connaissance des caractéristiques mécaniques de la structure car elle se base sur la seule source d’information qui est le son produit. Ce modèle va donc chercher à reproduire perceptivement les contributions des deux grandeurs physiques importantes pour l’oreille humaine qui sont la loi d’amortissement qui est caractéristique de la nature du matériau et les composantes tonales permettant de percevoir la forme géométrique de la structure qui a produit le son (cf. chapitre 1). En particulier, la loi d’amortissement sera simulée à l’aide d’un filtre numérique évolutif et la reproduction de l’émergence des composantes tonales par synthèse additive ou par une méthode basée sur le modèle guide d’onde numérique unidimensionnel.

Dans ce paragraphe, je présenterai successivement la mise en œuvre des deux principales contributions du modèle de synthèse à savoir : la simulation de la loi d’amortissement et la simu-

lation de la partie résonante du signal.

4.1.1 Simulation de la loi d'amortissement

La méthode de simulation de la loi d'amortissement que je propose dans ce paragraphe est basée sur les travaux de J. O. Smith et de S. Van Duyne. Ils ont en effet utilisé une technique de filtrage évolutif pour simuler le comportement vibratoire de corps d'instruments de musique [60] [61]. Cette méthode de simulation est schématisée sur la figure (4.1).

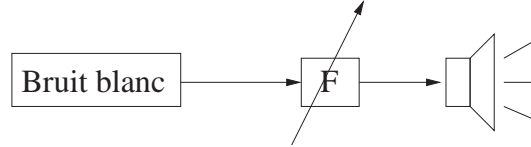


FIG. 4.1 – Le signal d'entrée du modèle est un bruit blanc de manière à reproduire une forte densité modale qui est caractéristique des sons produits par des structures multidimensionnelles. L'amortissement du son est assuré par un filtre numérique F dont les paramètres évoluent au cours du temps.

Choix du signal d'entrée Je choisis comme signal d'entrée du modèle un bruit blanc. De manière générale, les structures complexes multidimensionnelles produisent des sons qui sont spectralement très riches. La densité de modes augmente avec la fréquence de telle sorte que dans les hautes fréquences, les résonances se superposent et ne sont plus discernables. Afin de reproduire cette forte densité de modes, une solution est de considérer un bruit blanc qui par définition correspond à une densité spectrale de puissance constante.

Simulation de la loi d'amortissement Ce bruit blanc est alors filtré de manière à reproduire la loi d'amortissement. L'amortissement du son est assuré par un filtre numérique évolutif dans le temps, que je note F . En toute généralité, je suppose que F est un filtre à réponse impulsionnelle infinie (filtre IIR). Sa transformée en z s'écrit :

$$F(z) = \frac{\sum_{\ell=0}^L a_{\ell} z^{-\ell}}{1 + \sum_{k=1}^K b_k z^{-k}} \quad \text{avec} \quad z = e^{i\omega} \quad (4.1)$$

Dans le domaine temporel, le signal de sortie s du filtre F à l'échantillon n s'écrit en fonction du signal d'entrée e et des échantillons précédents du signal de sortie :

$$s(n) = \sum_{\ell=0}^L a_{\ell}(n) e(n - \ell) - \sum_{k=1}^K b_k(n) s(n - k) \quad (4.2)$$

Les valeurs des coefficients $\{a_{\ell}, b_k\}$ varient au cours du temps. Toutefois, leur lente évolution me permet d'écrire l'équation aux différences et de supposer qu'ils sont localement constants. Par ailleurs, cette notion de stationnarité locale sera validée plus loin dans le cadre de l'estimation des coefficients du filtre à partir de l'analyse de sons réels.

4.1.2 Simulation de la partie tonale du spectre

Pour reproduire les résonances perceptivement importantes contenues dans le signal, je propose ici deux méthodes. La première méthode est basée sur la synthèse additive. Les paramètres nécessaires à la synthèse sont estimés à partir de l'analyse modale du spectre. La deuxième méthode utilise le concept du modèle guide d'onde numérique. Le système est rebouclé, ce qui rend compte de la création d'ondes stationnaires dans la structure physique, qui sont responsables de l'émergence de résonances dans le spectre.

Simulation par synthèse additive

La première approche consiste à utiliser une méthode basée sur la synthèse additive. Le modèle de synthèse que je propose est représenté sur la figure (4.2).

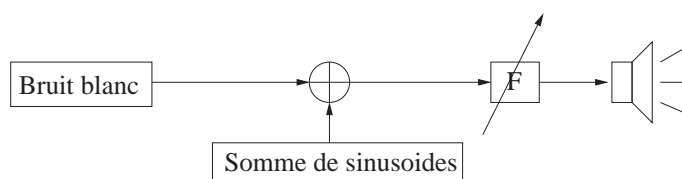


FIG. 4.2 – Afin de simuler la partie résonante du spectre, je rajoute au signal d'entrée initial (qui est un bruit blanc) une somme de sinusoides dont les valeurs des paramètres (amplitudes et fréquences propres) sont estimées par l'analyse modale. Ce signal d'entrée est ensuite injecté dans le filtre évolutif F qui va assurer la décroissance du son.

Il consiste à rajouter au bruit blanc de départ, une somme de sinusoides dont les paramètres tels que les amplitudes et les fréquences de chaque composante sinusoidale, sont estimés de l'analyse du signal à reproduire. Leur décroissance temporelle est assurée par le filtre passe-bas évolutif. Pour chaque résonance à reproduire, l'amplitude et la fréquence propre sont estimées à l'aide des méthodes d'analyse décrites dans le chapitre 1.

Simulation par méthode récursive

La simulation de la partie résonante du spectre par une méthode de synthèse additive est aisément mise en œuvre mais n'a pas de relation directe avec le phénomène physique qui a produit ces résonances. Je propose dans ce paragraphe un modèle plus *physique* dans la mesure où il rend compte des phénomènes vibratoires qui se produisent dans la structure. Ce modèle est représenté sur la figure (4.3).

Dans ce cas, la simulation de la partie tonale du spectre est assurée par des boucles de rétroaction. Le principe consiste à faire propager dans la structure des ondes propagatives et d'en privilégier certaines par le biais de ces boucles, en créant des ondes stationnaires. De l'énergie est donc renvoyée dans le système par rétroaction et par conséquent renforce l'amplitude du signal de sortie aux fréquences de résonance considérées.

Pour cela, je me base sur le formalisme des guides d'onde numériques par sous-bandes (voir paragraphe 3.1.3). Je note S le nombre de résonances que je veux reproduire. Chaque résonance est simulée par un guide d'onde numérique composé d'une ligne à retard $D_{s=1,\dots,S}$ et d'un filtre numérique passe-bande $B_{s=1,\dots,S}$ centré sur la fréquence de la résonance considérée. Ce dernier permet de sélectionner la résonance voulue parmi le spectre de raies engendré par la ligne à retard. Les harmoniques d'une même fondamentale peuvent être reproduites avec la même ligne à retard, en augmentant la largeur de bande du filtre passe-bande sélectif.

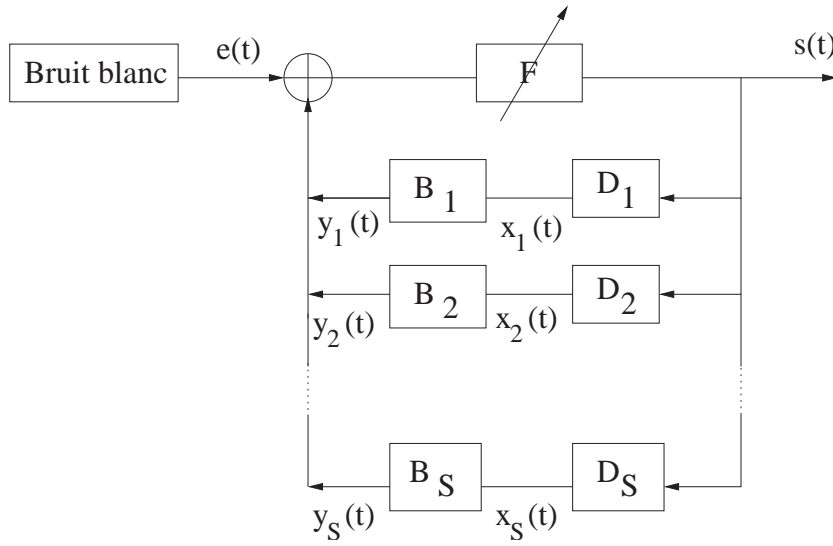


FIG. 4.3 – *Modèle de synthèse basé sur le formalisme des guides d'ondes numériques en sous-bandes [27]. Les résonances émergentes du spectre sont simulées par le biais de boucles à rétroaction. Chaque boucle est composée d'une ligne à retard D_s et d'un filtre numérique passe-bande B_s de manière à sélectionner la résonance voulue parmi le spectre de raies harmoniques produit par la ligne à retard. Ce modèle se veut plus physique dans la mesure où le modèle rend compte de la création d'ondes stationnaires dans la structure par le biais de ces boucles.*

Le filtre D_s est une ligne à retard. Il est défini de la manière suivante :

$$D_s(\omega) = e^{-i\omega d_s} \quad (4.3)$$

Je décrirai dans le paragraphe suivant la méthode d'estimation du paramètre d_s . Dans le domaine temporel, le signal $x_s(n)$ à la sortie de ce filtre à l'échantillon n (voir figure (4.3)) s'écrit donc en fonction de son signal à l'entrée, qui n'est autre que le signal de sortie du modèle global $s(n)$:

$$x_s(n) = s(n - d_s) \quad (4.4)$$

Ce filtre est indispensable car sans lui, l'implémentation temporelle du modèle serait impossible. En effet, si je calcule le signal de sortie $s(n)$ du modèle global à l'échantillon n , j'obtiens l'équation aux différences suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} s(n) = \sum_{\ell=0}^L a_{\ell}(n) \left(e(n - \ell) + \sum_{s=1}^S y_s(n - \ell) \right) - \sum_{k=1}^K b_k(n) s(n - k) \\ \text{avec} \\ y_s(n) = c_0 s(n - d_s) + c_1 s(n - d_s - 1) + c_2 s(n - d_s - 2) - \\ \quad c_3 y_s(n - 1) - c_4 y_s(n - 2) \end{array} \right. \quad (4.5)$$

Ce retard permet de rendre le système causal et de pouvoir calculer chronologiquement les échantillons de sortie du modèle.

Chaque filtre passe-bande B_s est défini comme un filtre numérique d'ordre deux. La transformée en z correspondante s'écrit :

$$B_s(z) = A_s \frac{c_0 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2}}{1 + c_3 z^{-1} + c_4 z^{-2}} \quad (4.6)$$

Les valeurs de coefficients $\{c_0, c_1, c_2, c_3, c_4\}$ sont définies en fonction de l'utilisation du filtre. Si je veux construire un filtre passe-bande, les coefficients sont alors définis de la manière suivante [15] :

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{\alpha}{1 + \alpha} ; c_1 = 0 ; c_2 = \frac{-\alpha}{1 + \alpha} \\ c_3 &= \frac{-2 \cos(2\pi f_c)}{1 + \alpha} ; c_4 = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Le paramètre α est défini par la relation suivante :

$$\alpha = \frac{\sin(2\pi f_c)}{2Q} \quad \text{avec} \quad Q = \frac{\Delta f}{f_c} \quad (4.8)$$

avec f_c la fréquence centrale du filtre, Δf la largeur de bande à -3 dB et A_s l'amplitude maximale du filtre à la fréquence centrale f_c .

Je définis le filtre passe-bande par son module et sa phase : $B_s(\omega) = |B_s(\omega)| e^{i\Phi_{B_s}(\omega)}$. La figure (4.4) représente le module et la phase d'un filtre passe-bande pour une amplitude A_s unité, une fréquence centrale f_c égale à 5000 Hz et une largeur de bande Δf égale à 2 Hz . Dans le domaine temporel, le signal $y_s(n)$ à la sortie du filtre passe-bande $B_s(z)$ à l'échantillon n s'écrit donc en fonction du signal d'entrée $x_s(n)$:

$$y_s(n) = c_0 x_s(n) + c_1 x_s(n-1) + c_2 x_s(n-2) - c_3 y_s(n-1) - c_4 y_s(n-2) \quad (4.9)$$

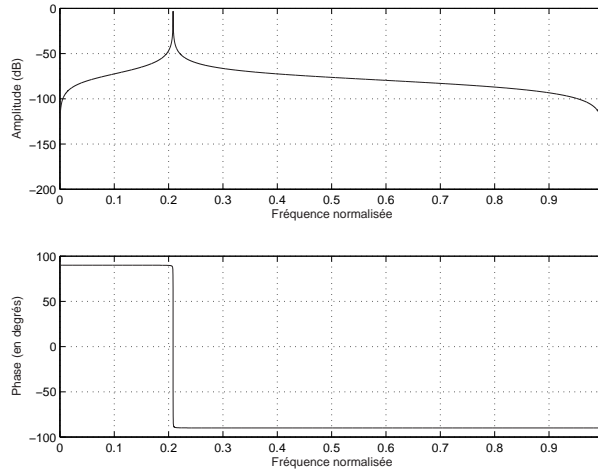


FIG. 4.4 – **Figure du haut :** Module $|B_s|$ (en dB) du filtre passe-bande en fonction de la fréquence (normalisée à la moitié de la fréquence d'échantillonnage) pour une amplitude A_s unité, une fréquence centrale f_c égale à 5000 Hz et une largeur de bande Δf égale à 2 Hz . **Figure du bas :** Phase Φ_{B_s} correspondante en fonction de la fréquence (qui est normalisée également). Je note qu'elle est nulle pour la fréquence centrale du filtre.

4.2 Calage du modèle de synthèse à partir de l'analyse des signaux

Dans notre cadre de travail d'analyse-synthèse, les paramètres du modèle de synthèse sont estimés à partir de l'analyse du signal à reproduire. Je vais dans un premier temps proposer une méthode d'estimation des paramètres du filtre évolutif responsable de l'amortissement du son. Puis, dans un deuxième temps, je présenterai une méthode de calage des autres paramètres responsables de l'émergence de la partie tonale du spectre. En ce qui concerne ce dernier point, je

ne traiterai que le deuxième modèle présenté en (4.1.2). En effet, dans le cas du premier modèle présenté en (4.1.2) utilisant la méthode de synthèse additive, il suffit d'estimer les amplitudes et les fréquences propres contenues dans le signal par des méthodes connues d'analyse spectrale dont quelques exemples ont été présentés dans le chapitre 1.

4.2.1 Estimation des paramètres du filtre évolutif

Dans l'expression du filtre évolutif F en (4.1), les inconnues du problème sont les coefficients $\{a_{\ell=0,\dots,L}, b_{k=1,\dots,K}\}$. Leurs valeurs évoluent aux cours du temps et sont calculées à intervalles de temps réguliers que je note Δt et que je fixe de manière arbitraire. Toutefois, ce pas de temps doit être assez grand pour vérifier la condition de stationnarité dans cet intervalle de temps et ainsi avoir le droit d'effectuer l'opération de convolution pour calculer le signal temporel. Le nombre de coefficients que je note N_c égal à $N_c = L + K + 1$ doit être naturellement petit afin que l'implémentation du modèle de synthèse soit le plus simple possible. Afin de me ramener à la résolution d'un système de N_c équations à N_c inconnues, il faut par ailleurs déterminer N_c contraintes. Ces contraintes sont reliées aux grandeurs perceptives caractéristiques du signal à reproduire et consistent à les garder invariantes entre le signal de référence et le signal de synthèse. Ce filtre évolutif ayant pour rôle de reproduire la décroissance temporelle du signal, il faut garder invariante la loi d'amortissement caractéristique du matériau. Cependant, je peux limiter ces invariants à seulement quelques sous-bandes qui sont perceptivement pertinentes.

Des travaux antérieurs effectués sur le *tristimulus* [53] ont montré que le timbre d'un son se caractérisait par la sonie calculée dans trois domaines fréquentiels distincts qui sont :

- le mode fondamental
- les partiels 2, 3 et 4
- les partiels 5 à n (désignant l'ordre du dernier partiel significatif)

Par conséquent, le timbre d'un son peut être représenté dans un espace tridimensionnel où chaque point est localisé par les coordonnées (x, y, z) qui s'écrivent de la manière suivante :

$$x = \frac{N_5^n}{N} \quad ; \quad y = \frac{N_2^4}{N} \quad ; \quad z = \frac{N_1}{N} \quad (4.10)$$

avec N_1 la sonie du fondamental, N_i^j définie par l'équation de Stevens [64] :

$$N_i^j = 0.85 N_{max} + 0.15 \sum_i^j N_i \quad \text{avec} \quad N_{max} = \max(N_i^j) \quad (4.11)$$

et la sonie globale N définie par :

$$N = N_1 + N_2^4 + N_5^n \quad (4.12)$$

Les trois coordonnées vérifiant la relation $x + y + z = 1$, il suffit d'utiliser deux coordonnées pour tracer le diagramme de tristimulus qui est représenté sur la figure (4.5).

Ainsi, les sons ayant des composantes hautes fréquences prédominantes sont repérés par une grande valeur de x , ceux qui ont des composantes moyennes fréquences sont repérés par une grande valeur de y , enfin ceux qui ont une prédominance du fondamental sont repérés par une grande valeur de z . Par ailleurs, ce diagramme met en évidence les évolutions temporelles des transitoires d'attaque jusqu'au régime stationnaire.

En suivant la même idée de découpage en trois domaines fréquentiels dans le concept du tristimulus, je choisis de considérer trois sous-bandes particulières et d'imposer l'invariance de leur évolution temporelle afin d'estimer les coefficients du filtre évolutif. En pratique, ces sous-bandes sont déterminées de la manière suivante.

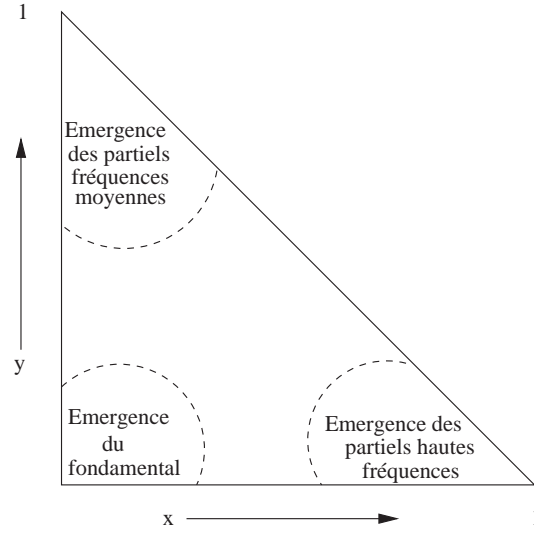


FIG. 4.5 – Diagramme de tristimulus caractérisant le timbre d'un son.

On calcule tout d'abord le barycentre spectral énergétique ω_B défini par la relation suivante :

$$\omega_B = \frac{\int_0^{\omega_e/2} \omega |\hat{s}(\omega)|^2 d\omega}{\int_0^{\omega_e/2} |\hat{s}(\omega)|^2 d\omega} \quad (4.13)$$

avec $\omega_e = 2\pi f_e$, f_e la fréquence d'échantillonnage et $\hat{s}(\omega)$ la transformée de Fourier du signal $s(t)$. Deux domaines de fréquence se distinguent de part et d'autre de ω_B . On calcule ensuite les barycentres ω_{Bd} et ω_{Bg} dans ces deux domaines de la même manière que (4.13) :

$$\omega_{Bd} = \frac{\int_0^{\omega_B} \omega |\hat{s}(\omega)|^2 d\omega}{\int_0^{\omega_B} |\hat{s}(\omega)|^2 d\omega} \quad \text{et} \quad \omega_{Bg} = \frac{\int_{\omega_B}^{\omega_e/2} \omega |\hat{s}(\omega)|^2 d\omega}{\int_{\omega_B}^{\omega_e/2} |\hat{s}(\omega)|^2 d\omega} \quad (4.14)$$

Une fois ces trois barycentres énergétiques calculés, il suffit de repérer les numéros de sous-bandes qui contiennent ces trois barycentres. Je vais ainsi imposer trois contraintes ($N_c = 3$) qui correspondent à l'évolution temporelle des trois sous-bandes correspondant aux barycentres. Le filtre évolutif F aura par conséquent trois coefficients. Avec trois coefficients, le filtre peut avoir un pôle et deux zéros ou bien deux pôles et un zéro. Le choix est déterminé par le fait que ce filtre doit avoir une allure d'un filtre passe-bas dont la bande passante diminue de plus en plus jusqu'à l'extinction du son. Sachant que les pôles sont responsables de l'émergence de résonances, le filtre évolutif comprendra donc un pôle et deux zéros. A chaque pas de temps, sa transformée en z s'écrit alors :

$$F(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1}}{1 + b_1 z^{-1}} \quad \text{avec} \quad z = e^{i\omega} \quad (4.15)$$

Son module et sa phase s'écrivent :

$$\begin{cases} |F(\omega)| = \sqrt{\frac{a_0^2 + a_1^2 + 2a_0a_1 \cos(\omega)}{1 + b_1^2 + 2b_1 \cos(\omega)}} \\ \Phi_F(\omega) = \tan^{-1} \left(\frac{(a_0b_1 - a_1) \sin(\omega)}{a_0 + a_1b_1 + (a_1 + a_0b_1) \cos(\omega)} \right) \end{cases} \quad (4.16)$$

Enfin, le signal de sortie de ce filtre $s(n)$ à l'échantillon n s'écrit en fonction du signal d'entrée e :

$$s(n) = a_0(n)e(n) + a_1(n)e(n-1) - b_1(n)s(n-1) \quad (4.17)$$

La méthode d'estimation des coefficients de F est décrite sur le schéma (4.6). Ainsi, à chaque intervalle de temps Δt , les coefficients $\{a_0, a_1, b_1\}$ de F sont définis de telle sorte que l'erreur quadratique entre le module de F et la valeur de l'amplitude du signal temporel, soit minimale dans les trois sous-bandes. Ce problème revient à résoudre un système de trois équations à trois inconnues. La figure (4.7) représente l'évolution temporelle du module du filtre évolutif pour différentes lois d'amortissement. L'évolution temporelle des valeurs des coefficients de F est représentée sur la figure (4.8). Il est intéressant de noter que les courbes d'évolution sont régulières et peuvent être interpolées donc paramétrées.

4.2.2 Estimation du paramètre des lignes à retard

La boucle de rétroaction du modèle permet de recréer la propagation d'ondes stationnaires à l'intérieur de la structure qui sont responsables des résonances présentes dans le spectre. Le paramètre de chaque ligne à retard est déterminé de la manière suivante. Je repère tout d'abord les S résonances de plus grande amplitude dans le spectre global. Je suppose par la suite que les résonances d'amplitudes inférieures sont négligeables d'un point de vue perceptif. J'estime ensuite pour les S résonances, les valeurs des fréquences propres associées que je note $\{\omega_{s=1,\dots,S}\}$.

Le filtre F étant évolutif, le calage du paramètre des lignes à retard (puis des amplitudes A_s dans le paragraphe suivant) devrait à priori être effectué à chaque fois que les paramètres de F changent de valeurs. De plus, le signal d'entrée (un bruit blanc) ayant un caractère stochastique, il faut alors estimer une densité spectrale de puissance (je ne peux plus parler de transformée de Fourier) des signaux de sortie du modèle par moyenne sur plusieurs réalisations pour effectuer le calage. Dans ces conditions, le calage des paramètres du modèle serait une étape trop longue et fastidieuse. Une autre approche consiste à linéariser le système en remplaçant le filtre évolutif par un filtre équivalent d'un point de vue énergétique. Le filtre équivalent est défini de sorte que la densité de puissance contenue dans le signal de sortie du modèle avec le filtre évolutif est équivalente à celle du signal de sortie du modèle avec le filtre moyen équivalent.

Calcul du filtre moyen Le filtre évolutif F que je viens d'estimer me permet de reproduire l'amortissement temporel de chaque sous-bande. Du point de vue énergétique, je peux estimer un filtre moyen que j'appelle \tilde{F} . Ce filtre \tilde{F} est déterminé en moyennant les densités spectrales de puissance de sortie sur plusieurs réalisations (le signal d'entrée étant un signal stochastique). Parmi toutes les réponses fréquentielles du filtre F à chaque pas de temps, j'estime ensuite celui qui se rapproche le mieux de cette moyenne sur tous les spectres, comme le montre la figure de gauche de (4.9). J'aurai par la suite recours à ce filtre moyen pour caler les paramètres des lignes à retard ainsi que des filtres passe-bande dans les paragraphes suivants. La figure de droite de (4.9) représente de manière plus précise le module et la phase de ce filtre moyen ainsi estimé. Ce filtre moyen doit ensuite être normalisé pour que rapport signal/bruit soit conservé entre le signal de synthèse et le signal à reproduire, comme le montre la figure (4.10).

L'estimation d'un filtre moyen permet de considérer le système linéaire car il n'y a plus de dépendance temporelle des filtres du modèle. Dans ces conditions, il devient alors possible de calculer une fonction de transfert du modèle global qui est représenté sur la figure (4.3) et qui s'écrit :

$$H(\omega) = \frac{\tilde{F}(\omega)}{1 - \tilde{F}(\omega) \sum_{s=1}^S (B_s(\omega) D_s(\omega))} \quad (4.18)$$

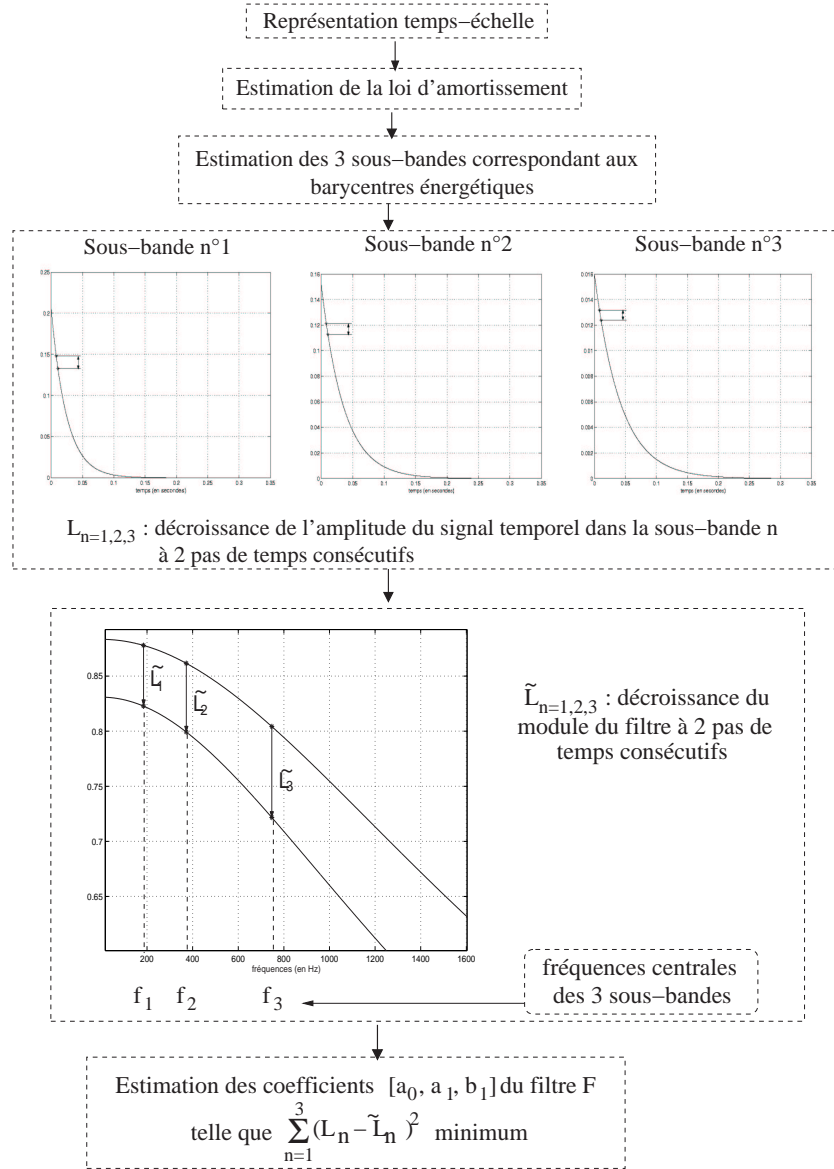


FIG. 4.6 – A partir des courbes d'évolution temporelle du signal filtré dans les sous-bandes caractéristiques des trois barycentres énergétiques, je vais pouvoir estimer les coefficients du filtre évolutif F à chaque pas de temps. La figure du bas représente l'évolution de F entre deux pas de temps consécutifs. Il faut déterminer les coefficients de F de sorte que son module décroisse de la même quantité que l'amplitude du signal temporel à la fréquence considérée.

Estimation du paramètre des lignes à retard L'estimation du paramètre d_s des lignes à retard $D_s(\omega)$ définies par la relation (4.3) s'effectue à partir de $H(\omega)$ de la manière suivante. Les filtres $D_s(\omega)$ permettent de produire un signal harmonique dont la fréquence fondamentale est définie à partir de la valeur de d_s (cf. chapitre 2). Le filtre passe-bande $B_s(\omega)$ va alors sélectionner une composante (la fondamentale en général) parmi toutes ses harmoniques. Les pôles de $H(\omega)$ correspondent aux fréquences de résonance des modes produits par ce modèle. Ainsi, si je veux produire une résonance à la pulsation ω_s , alors la valeur d_s correspondante doit vérifier la relation suivante :

$$1 - \tilde{F}(\omega_s) \sum_{s=1}^S (B_s(\omega_s) D_s(\omega_s)) \approx 0 \quad (4.19)$$

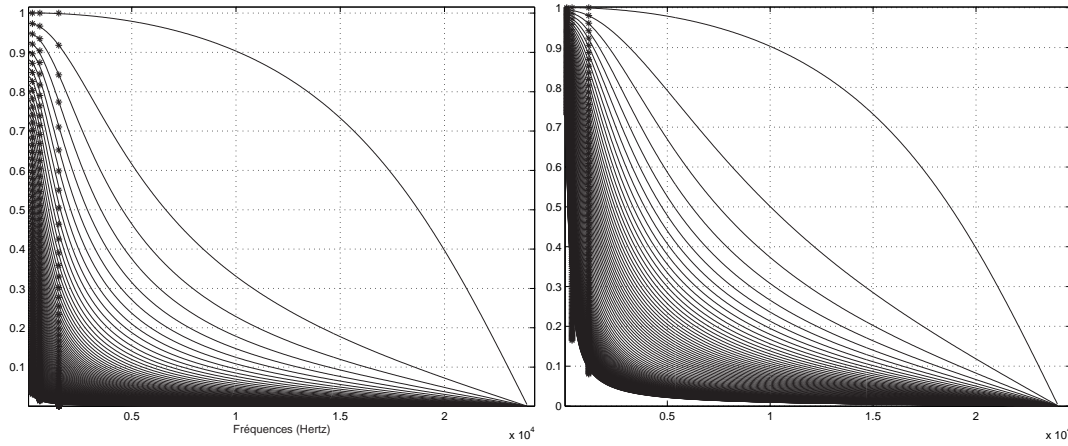


FIG. 4.7 – Evolution du module du filtre F en fonction des pulsations (normalisées à π) pour un son impulsif d'une plaque mince en contre-plaqué (figure de gauche) et pour un son impulsif d'une plaque mince en verre (figure de droite). Ce filtre devient de plus en plus passe-bas. Les astérisques (*) correspondent aux amplitudes relatives du signal temporel dans chaque sous-bande à chaque pas de temps.

La sommation sur l'indice s se réduit à un terme à cause du filtre passe-bande sélectif qui annule toutes les autres résonances sauf celle sur laquelle le filtre est centrée, ce qui me permet de réécrire :

$$| \tilde{F}(\omega_s) | e^{i\Phi_{\tilde{F}}(\omega_s)} | B_s(\omega_s) | e^{i\Phi_{B_s}(\omega_s)} e^{-i\omega_s d_s} \approx 1 \quad (4.20)$$

avec $\Phi_{\tilde{F}}(\omega)$ et $\Phi_{B_s}(\omega)$ respectivement les phases des filtres $\tilde{F}(\omega)$ et $B_s(\omega)$. Le terme de gauche est maximal lorsque :

$$\Phi_{\tilde{F}}(\omega_s) + \Phi_{B_s}(\omega_s) - \omega_s d_s = 2p\pi \quad \text{avec} \quad p \in \mathbb{Z} \quad (4.21)$$

La phase Φ_{B_s} à la pulsation ω_s est nulle par construction comme l'a illustré précédemment la figure (4.4). J'en déduis l'expression de d_s :

$$d_s = \frac{\Phi_{\tilde{F}}(\omega_s) - 2p\pi}{\omega_s} \quad \text{avec} \quad p \in \mathbb{Z} \quad (4.22)$$

L'entier p est fixé de sorte que la grandeur d_s soit positive car elle correspond à un retard. Si d_s est définie négative, la valeur de sortie du filtre serait définie à partir des valeurs postérieures et le système total ne serait pas causal.

4.2.3 Estimation des paramètres des filtres passe-bande

Dans chaque boucle de rétroaction du modèle, le filtre passe-bande permet de sélectionner une résonance parmi le spectre de raies harmoniques produit par la ligne à retard. Si plusieurs résonances peuvent correspondre à ces harmoniques, il suffira d'augmenter la largeur de bande du filtre. Les paramètres à déterminer pour chaque filtre sont la fréquence centrale f_s , la largeur de bande Δf et l'amplitude du filtre A_s à la fréquence centrale.

L'ensemble des valeurs de f_s est donné directement par le repérage des S résonances dans le spectre du signal. La largeur de bande Δf est fixée à une valeur comprise entre 1 Hz et 5 Hz pour tous les filtres. Plus cette valeur est petite, plus les perturbations apportées par la présence de ces filtres sont réduites.

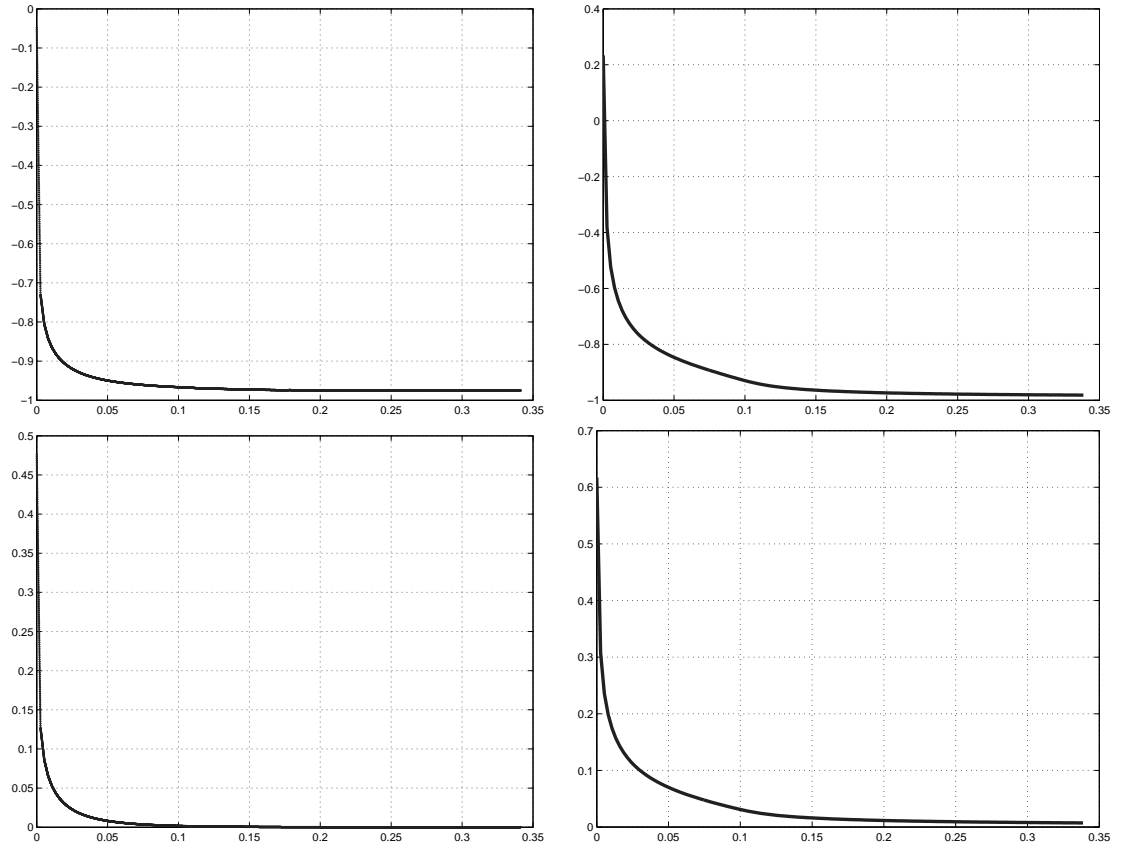


FIG. 4.8 – **Figures de gauche :** Valeurs du coefficient b_1 (en haut) et des coefficients a_0 et a_1 (en bas) correspondant au signal de la plaque en **contre-plaqué** en fonction du temps (en secondes). **Figures de droite :** Valeurs du coefficient b_1 (en haut) et des coefficients a_0 et a_1 (en bas) correspondant au signal de la plaque en **verre** en fonction du temps (en secondes). Dans les deux cas, l'évolution des coefficients a_0 et a_1 sont les mêmes.

L'amplitude de chaque filtre $B_s(\omega)$ est estimée par une méthode de minimisation au sens des moindres carrés telle que le critère \mathcal{C} défini par la relation suivante soit minimum :

$$\mathcal{C} = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^S |f_s|^2 \quad \text{avec} \quad f_s = |H(A_s, \omega_s)| - |\tilde{H}(\omega_s)| \quad (4.23)$$

avec $\tilde{H}(\omega)$ la transformée de Fourier du signal de référence et $H(A_s, \omega)$ que je rappelle égale à :

$$H(A_s, \omega) = \frac{\tilde{F}(\omega)}{1 - \tilde{F}(\omega) \sum_{s=1}^S (B_s(A_s, \omega) D_s(\omega))} \quad (4.24)$$

La figure (4.11) représente le module de la fonction de transfert après calage des gains des filtres passe-bande pour quelques résonances.

4.2.4 Résultats de calage

La figure (4.12) nous permet de comparer le signal d'accéléromètre mesuré et le signal de sortie du modèle de synthèse après calage des paramètres suivant les méthodes décrites dans le paragraphe 4.2.

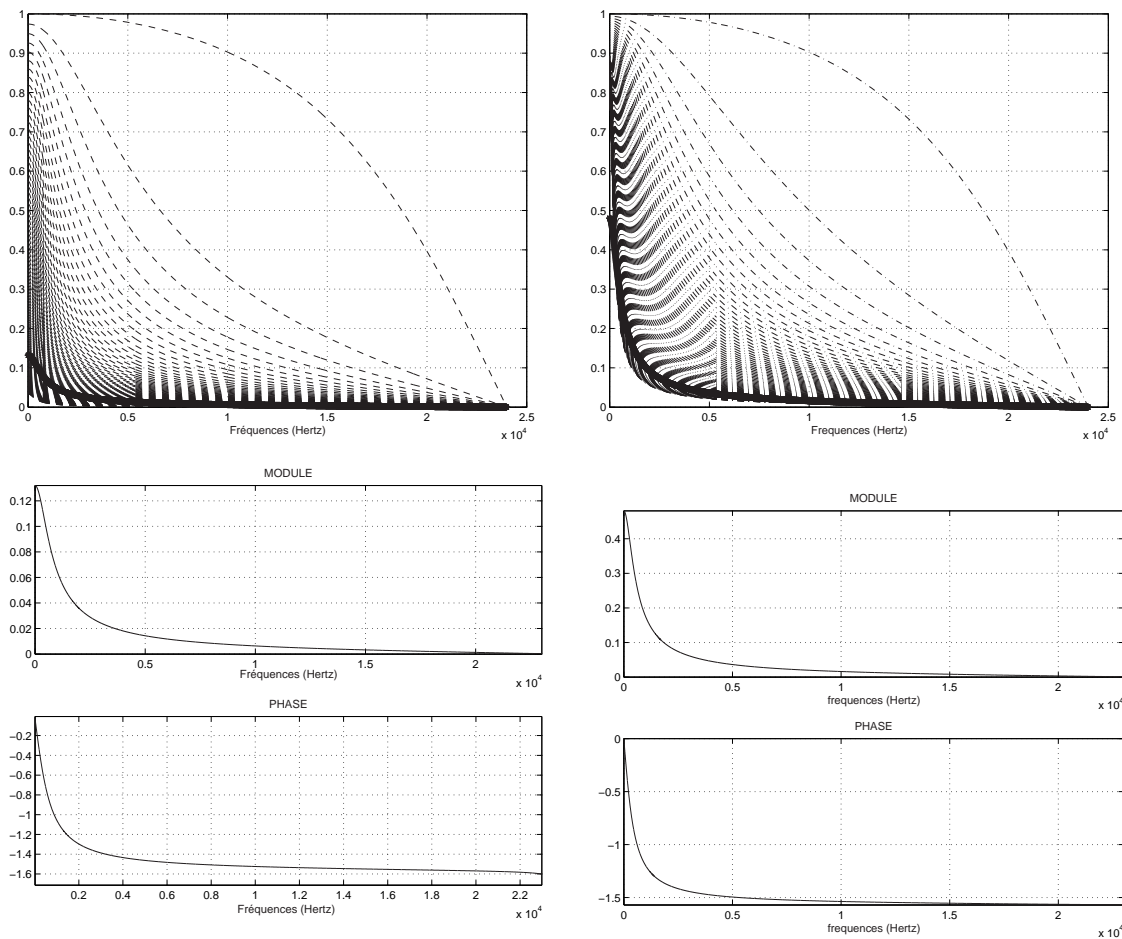


FIG. 4.9 – Le filtre moyen \tilde{F} (courbe en trait épais) est déterminé en estimant l’allure du filtre le plus proche parmi toutes les fonctions F (courbes en traits pointillés) de la moyenne énergétique des spectres de signaux de sortie effectuée sur plusieurs réalisations. **Figure de gauche :** Filtre moyen pour le cas du signal d’une plaque mince en contre-plaqué. **Figure de droite :** Filtre moyen pour le cas du signal d’une plaque mince en verre. En dessous de chaque figure représentant l’estimation du filtre moyen, le module (figure du haut) et la phase (figure du bas) du filtre moyen est représenté.

Les figures (4.13) montrent les représentations temps-échelle du signal de mesure et du signal de synthèse. Malgré le fait qu’elles ne sont pas tout à fait identiques, les sons de synthèse sont satisfaisants d’un point de vue perceptif (exemples sonores sur le CD d’accompagnement). L’amortissement est toutefois différent. Ceci vient du fait que le calage des paramètres du filtre évolutif est effectué au mieux, compte tenu du faible nombre de coefficients du filtre évolutif.

Par contre, à cause du bruit blanc à l’entrée du modèle, le signal de sortie ne sera pas reproductible pour un ensemble de valeurs des paramètres identiques, d’autant plus pour l’amplitude de chaque résonance.

On pourrait davantage optimiser le processus en ajoutant des coefficients au filtre évolutif F . La méthode d’estimation serait la même que celle présentée dans ce chapitre en prenant en compte autant de contraintes que de coefficients.

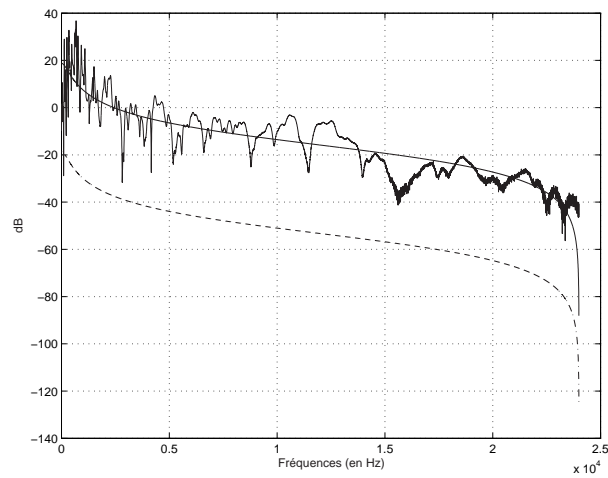


FIG. 4.10 – *Etape de normalisation du gain du filtre moyen. Le module du filtre moyen initial (spectre en pointillés) est normalisé par un gain G de sorte que le module du filtre obtenu (spectre en trait plein) corresponde (au sens des moindres carrés) avec l'amplitude de la partie du spectre qu'il vise à reproduire.*

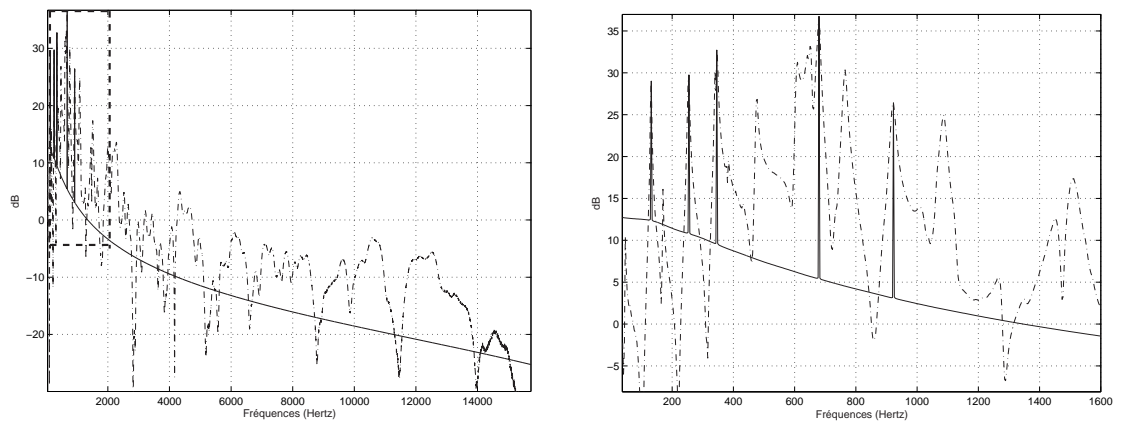


FIG. 4.11 – **Figure de gauche :** Calage des amplitudes des filtres passe-bande. L'amplitude du module de la fonction de transfert (en trait plein) aux fréquences de résonance est égal à l'amplitude du spectre de mesure (en traits pointillés). **Figure de droite :** Agrandissement de la figure de gauche pour les basses fréquences (encadré en traits pointillés).

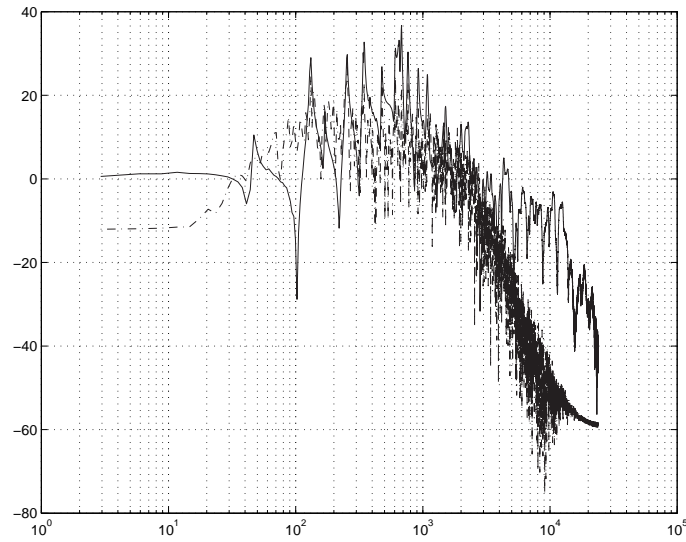


FIG. 4.12 – Spectre du signal de mesure (représenté en trait plein) et spectre du signal de sortie du modèle de synthèse (représenté en traits pointillés) exprimés en dB. L'axe des fréquences est logarithmique.

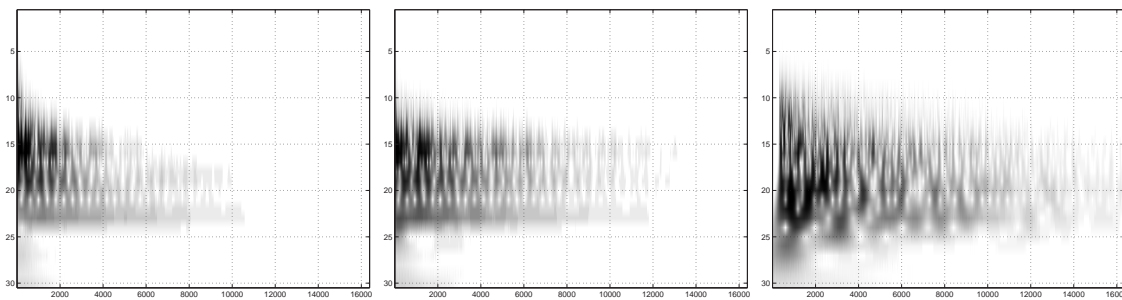


FIG. 4.13 – Représentations temps-échelle du signal de mesure (figure de gauche), du signal de synthèse obtenu avec le modèle représenté sur la figure (4.2) utilisant la synthèse additive (figure du milieu) et celui obtenu avec le modèle représenté sur la figure (4.3) (figure de droite). L'axe des abscisses est exprimé en nombre d'échantillons et l'axe des ordonnées correspond au paramètre d'échelle.

Conclusions sur ce chapitre

Le modèle de synthèse proposé dans ce chapitre constitue une généralisation des différentes méthodes de synthèse présentées dans les chapitres précédents dans la mesure où il permet de reproduire un son percussif produit par n'importe quelle structure. Certes, il n'est pas basé sur la modélisation physique de la structure émettrice mais ses paramètres sont définis directement à partir de l'analyse du signal de référence. En particulier, les coefficients du filtre évolutif responsable de l'amortissement du son sont reliés à la loi d'amortissement caractéristique de la nature du matériau. Les modes émergents peuvent être reproduits par synthèse additive ou par méthode récursive. Dans tous les cas, les paramètres nécessaires à la synthèse sont déterminés par les méthodes d'analyse définies dans le chapitre 1. Les sons de synthèse obtenus avec ce modèle sont satisfaisants d'un point de vue perceptif. Le modèle est suffisamment simple pour être aisément implémenté et piloté en temps-réel.

Perspectives

Ce modèle permet non seulement de reproduire un son donné mais également de créer de nouvelles sonorités. Pour cela, il est possible d'agir directement sur les coefficients du filtre évolutif ou sur les paramètres des lignes à retard. L'action sur le filtre évolutif permet de modifier l'amortissement du son et par conséquent de modifier les caractéristiques du matériau. Par ailleurs, l'action sur les paramètres des lignes à retard permet de changer virtuellement les dimensions de la structure qui a produit le son. En paramétrisant les courbes d'évolution temporelle des coefficients du filtre évolutif, il est alors possible de créer un *espace de timbre* dans lequel on pourra naturellement se déplacer d'un matériau à un autre.

Par ailleurs, il est possible d'utiliser les modèles de synthèse présentés dans les chapitres précédents (chapitres 2 et 3) pour simuler les résonances. Ainsi, à la place des méthodes proposées en 4.1.2 comme la synthèse additive ou la méthode récursive, il est alors possible de rajouter la contribution d'un modèle guide d'onde dont les paramètres seraient estimés de l'analyse du signal de référence.

Chapitre 5

La table d'harmonie du piano : une structure complexe aux fonctionnalités multiples

Dans les chapitres précédents, les modèles proposés ont concerné la simulation de sons d'impact sur des structures multidimensionnelles. La table d'harmonie du piano s'inscrit dans ce contexte. En effet, la table d'harmonie est une structure bidimensionnelle de forme complexe. Elle ne constitue pas un instrument de musique en soit comme les instruments percussifs. Elle n'est pas directement excitée par un maillet comme une peau de tambour ou une lame de xylophone mais par un signal particulier qui est la vibration des cordes. Cette excitation est particulière dans la mesure où elle est constituée d'une part d'un signal large bande correspondant à l'impact du marteau (qui se propage directement au chevalet) et d'autre part du signal vibratoire des cordes. Ce dernier n'est ni large bande, ni transitoire dans la mesure où cette excitation s'effectue pendant toute la durée des vibrations des cordes et concerne essentiellement leurs fréquences de résonance. Comme nous allons le voir, si le manque de continuité dans le spectre d'excitation pourrait à priori constituer un problème pour la caractérisation des vibrations du rayonnement de la table d'harmonie, il est cependant possible d'en tirer parti.

Toutefois, les modèles de synthèse basés sur les guides d'onde numériques ne pourront pas convenir dans la mesure où la table d'harmonie ne peut pas être modélisée par une structure simple (du type membrane ou plaque mince). Par ailleurs, sa modélisation mécanique est une aventure périlleuse car il est pour cela nécessaire de connaître les grandeurs physiques caractéristiques de la structure (telles que le module élastique qui peut varier d'un piano à un autre ou bien la contrainte appliquée à la table). De plus, fabriquée en bois (qui est un matériau inhomogène et anisotrope), la table d'harmonie est encastrée à ses bords et précontrainte et la construction de l'instrument demeure une recette secrète propre à chaque facteur de piano.

Dans ce chapitre, je me propose de présenter une méthode de simulation du résultat perceptif des vibrations de la table d'harmonie soumise à une excitation produite par les cordes. Pour cela, je propose dans un premier temps, une description physique du piano puis de la table d'harmonie en particulier. Nous verrons que la table d'harmonie contribue à la production du son principalement de deux manières : elle constitue un élément de couplage entre les cordes et elle joue le rôle d'amplificateur qui permet de rayonner l'énergie vibratoire des cordes dans le milieu environnant. Je présenterai ensuite les principales techniques existantes de synthèse du son du piano qui prennent en compte la table d'harmonie. En particulier, comme le concept du filtrage évolutif dans la méthode du *Commuted Piano Synthesis*, nous verrons que le modèle présenté dans le chapitre 4 peut convenir pour simuler la réponse impulsionnelle de la table d'harmonie. Etant donné que la table est excitée non pas par un impact, mais par la vibration des cordes, il est alors suffisant de connaître sa contribution uniquement sur les modes de résonance des cordes. L'idée consiste

alors à considérer un modèle de synthèse où le comportement vibratoire de la corde est simulé et de rajouter à ce modèle par l'intermédiaire de filtres, les contributions perceptivement importantes de la table d'harmonie. Nous verrons donc que sa contribution en tant qu'élément de couplage est prise en compte dans des filtres de couplage et que son rôle d'amplificateur est pris en compte en ajoutant un filtre de transfert.

Dans le cadre d'analyse-synthèse, une campagne de mesures a été effectuée sur un instrument réel (piano à queue Yamaha Disklavier) afin d'effectuer le calage des paramètres du modèle de cordes. Afin de valider la méthode, les sons de synthèse obtenus par le modèle seront restitués par des techniques binaurales et transaurales.

5.1 Description physique du piano

Le piano est un instrument à cordes frappées. La figure (5.1) représente une vue éclatée d'un piano à queue tandis que les figures en (5.2) représentent les mécanismes d'action du marteau pour un piano à queue et un piano droit.

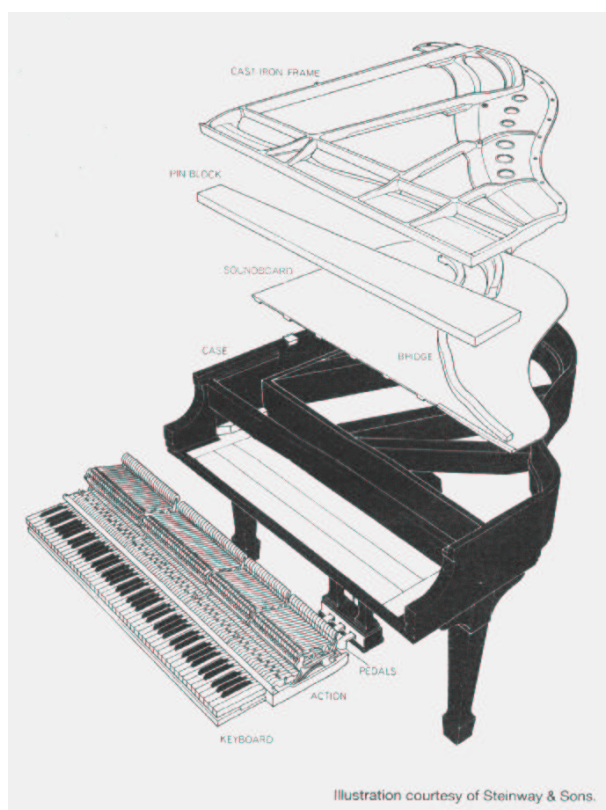


FIG. 5.1 – Vue éclatée d'un piano à queue.

Le son du piano est produit de la manière suivante. Lorsque la touche du clavier est enfoncée par l'instrumentiste, l'étaffoir se soulève et le marteau vient frapper la (ou les) corde(s). Les vibrations générées par le choc marteau-cordes se propagent le long des cordes et sont transmises à la table d'harmonie par l'intermédiaire des chevalets. La table d'harmonie transforme ensuite l'énergie mécanique communiquée par les cordes en énergie acoustique rayonnée dans le fluide environnant. Les principaux éléments acteurs dans l'instrument sont donc :

- *le marteau* : le marteau est une pièce en bois munie d'une tête feutrée. C'est lui qui met en vibration les cordes en venant les frapper perpendiculairement. Les paramètres importants sont la masse (qui influe sur la durée du contact marteau-cordes), le point de frappe, la

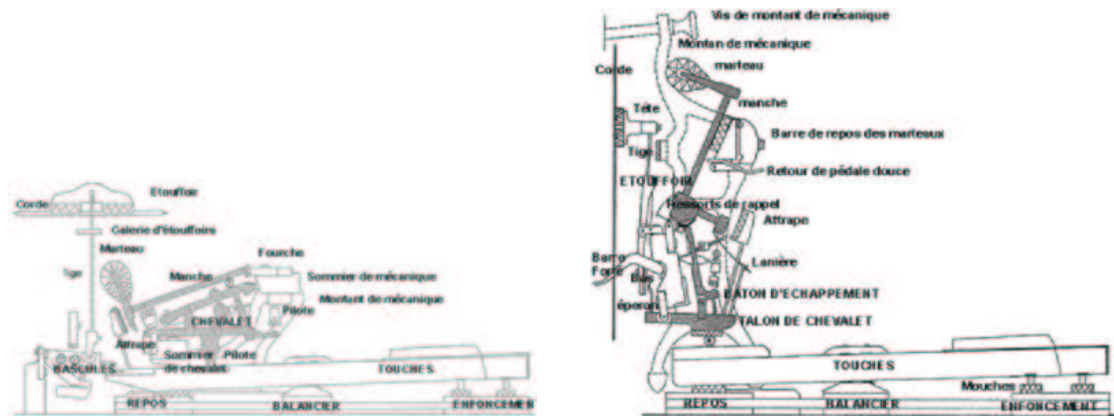


FIG. 5.2 – Mécanismes d'action du marteau dans le cas d'un piano à queue (figure de gauche) et d'un piano droit (figure de droite).

vitesse de frappe (qui influe sur le timbre en enrichissant le spectre en composantes lorsque la vitesse augmente) et la raideur du feutre (qui augmente avec la vitesse de frappe). Ce dernier paramètre possède un comportement non-linéaire, rendant caractéristique le timbre du piano.

- *les cordes* : les cordes sont en acier. Chaque corde est tendue entre deux chevilles fixées dans un cadre rigide en acier et est appuyée sur le chevalet. Pour les notes graves, les cordes sont filées afin d'augmenter leur masse. Dans les notes médium (resp. aiguës), deux (resp. trois) cordes sont associées pour une note, ce qui fait apparaître des phénomènes de couplage dans le son produit [67].
- *les chevalets* : les chevalets servent d'intermédiaires entre les cordes et la table d'harmonie. Ils permettent de transmettre l'énergie mécanique des cordes mises en vibration à la table. Ils sont solidaires de la table, ce qui implique que du point de vue de la table, l'excitation est répartie sur toute la longueur des chevalets (excitation non ponctuelle).
- *la table d'harmonie* : la table d'harmonie joue le rôle d'amplificateur. Elle peut être comparée à la membrane d'un haut-parleur. Elle permet de transformer l'énergie mécanique des cordes mises en vibration en énergie acoustique rayonnée dans le milieu environnant [25]. Une description détaillée est effectuée dans le paragraphe suivant.
- *le couvercle* : le couvercle est principalement responsable de la directivité du son produit. Il peut être positionné ouvert (suivant deux positions) ou fermé.

Les pertes et les transferts d'énergie qui se produisent entre les éléments cordes, chevalets et table d'harmonie sont représentés sur la figure (5.3).

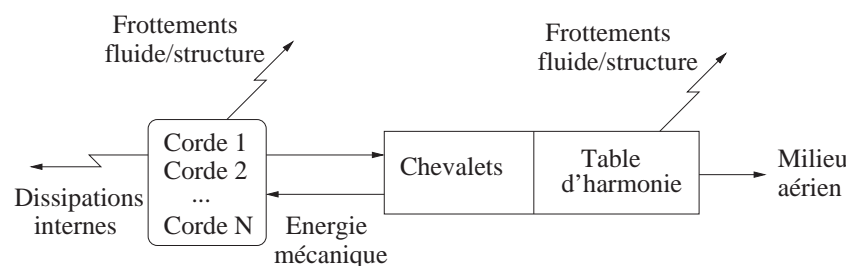


FIG. 5.3 – Principaux transferts et dissipations d'énergie dans le système {cordes/chevalets/table d'harmonie} d'un piano.

5.2 Description de la table d'harmonie d'un piano

La table d'harmonie est une plaque mince formée de planches en épicéa (dans la plupart des cas) de 15 cm de largeur et 7 mm d'épaisseur environ qui sont coupées dans le sens parallèle aux fibres du bois et qui sont ensuite collées côte à côte. L'ensemble est ensuite découpé à la forme désirée [24]. Par exemple, pour un piano droit, elle est de forme rectangulaire de dimension 1×1.4 m environ. L'épicéa est un matériau de module d'élasticité dynamique de l'ordre de 10^{10} N.m^{-2} dans le sens parallèle aux fibres du bois et 5.10^8 N.m^{-2} dans le sens perpendiculaire aux fibres. Sa densité massique est de l'ordre de 400 kg.m^{-3} . Ces chiffres peuvent varier d'un arbre à un autre pour une même essence.

Des raidisseurs (en bois également) sont collés derrière la table à intervalles réguliers afin d'éviter que la table ne se fissure à cause des variations de température et d'humidité et afin d'augmenter la rigidité du matériau dans la direction perpendiculaire aux fibres. Ils permettent de compenser l'anisotropie de la table. Après ajout des raidisseurs, le rapport des modules d'élasticité dans les directions perpendiculaires se réduit à un facteur deux. L'intervalle entre deux raidisseurs voisins permet de détruire les ondes qui ont une longueur d'onde supérieure à cette valeur. La table est alors fixée au cadre par une couronne de bois de 1 à 2 mm d'épaisseur. Elle possède une forme initiale galbée (de l'ordre de 15 à 50 m de rayon de courbure) de manière à supporter la pression statique des cordes.

Par ailleurs, la présence des chevalets collés à la table d'harmonie, chargés par la pression statique des cordes, a pour effet principal de décaler les fréquences propres car il y a augmentation de la raideur de la table. Au dessus de 600 Hz environ, les chevalets se déplacent de manière rigide. Ils forcent les ventres de vibration à se décaler dans les espaces laissés libres.

5.2.1 Contribution de la table d'harmonie dans le son du piano

En plus de supporter la composante verticale de la tension des cordes (de l'ordre de 10 à 20 N par corde), la table d'harmonie a deux fonctions majeures dans la production du son de piano :

- Une fonction mécanique : elle constitue un élément de couplage entre les cordes. En effet, toutes les cordes sont tendues entre un sillet et un chevalet. Le sillet peut être considéré comme un appui fixe mais le chevalet constitue un appui mobile. Des échanges énergétiques qui ont des effets audibles dans le son, vont donc s'effectuer par l'intermédiaire du chevalet (et donc de la table d'harmonie).
- Une fonction acoustique : elle convertit l'énergie mécanique transmise par les cordes via les chevalets en énergie acoustique rayonnée dans le milieu environnant.

La décroissance du son dépend en partie de la différence d'impédance entre les cordes et la table d'harmonie. En d'autres termes, plus cette différence est faible, plus le transfert énergétique entre les cordes et la table est efficace et plus la durée du son produit est courte. Des résultats expérimentaux viennent appuyer ce fait. En effet, des mesures de temps de décroissance de différentes notes ont été réalisées par K. Wogram [69]. Pour une note donnée, la tension de la corde a été modifiée (donc sa fréquence fondamentale de vibration). Comme prédit, le temps de décroissance de la note est plus longue à un minimum de la courbe d'impédance de la table d'harmonie qu'à une de ses résonances. A partir de cette courbe, il est possible de déterminer pour quelles fréquences l'énergie des cordes est transmise plus efficacement à la table d'harmonie. En particulier, l'écart entre les impédances respectives étant plus faible en hautes fréquences, le transfert d'énergie est plus efficace et le son dure moins longtemps. Dans les basses fréquences, le transfert d'énergie {corde-table} est faible car les impédances respectives ont des valeurs très différentes, ce qui se traduit par un faible amortissement des notes graves et des partiels de rang faible.

De nombreuses expériences ont été menées afin de déterminer l'impédance de la table d'harmonie [35] [36]. Elle est définie comme le rapport :

$$Z(P, \omega) = \frac{F(P, \omega)}{v(P, \omega)} \quad (5.1)$$

où F est la force appliquée et v la vitesse transversale de la table d'harmonie au point P . Elle dépend généralement de la fréquence. Expérimentalement, elle décroît lorsque les fréquences augmentent avec un taux d'affaiblissement d'environ 5 dB / octave. En ordre de grandeur, elle varie de 1000-2000 Kg/s pour 100 Hz à 0.1-0.2 Kg/s pour 10 kHz. L'impédance varie en fonction de la fréquence et des points de mesures. Les points de mesure les plus significatifs se situent au niveau des deux chevalets, qui correspondent aux endroits où l'énergie vibratoire des cordes est transmise à la table.

L'impédance diminue dans les hautes fréquences. Ce phénomène s'explique par la présence des raidisseurs et des deux chevalets solidaires à la table d'harmonie et par les mécanismes d'amortissement dans le bois. En effet, elle apparaît plus rigide pour les ondes dont la longueur d'onde est supérieure à la distance qui sépare deux raidisseurs. Par contre, pour le cas contraire, les ondes de longueur d'onde inférieure voient la table d'harmonie plus souple car à cette échelle, l'épaisseur équivalente de la table est plus petite.

5.2.2 Modèle mécanique de la table d'harmonie d'un piano droit

A partir de mesures expérimentales d'impédance obtenues sur un piano droit [36] [35], N. Gior-dano a développé un modèle mécanique approchant le comportement vibratoire de table d'harmonie d'un piano droit [34]. Il a tout d'abord considéré le système le plus simple qu'il soit, c'est-à-dire le système {masse-ressort-amortisseur} dont l'équation du mouvement s'écrit :

$$m \frac{\partial^2}{\partial x^2} z(x, t) = -Kz(x, t) - R \frac{\partial}{\partial t} z(x, t) + F(x, t) \quad (5.2)$$

où m est la masse, K la constante de raideur, R le coefficient d'amortissement, $F(x, t)$ la force excitatrice et $z(x, t)$ le déplacement suivant x à l'instant t . Sous une sollicitation sinusoïdale de la forme $F(x, t) = F_0(x)e^{i\omega t}$, l'impédance du système notée Z s'écrit :

$$Z = R + i \left(\omega m - \frac{K}{\omega} \right) \quad (5.3)$$

Ce modèle est bien évidemment insuffisant car en hautes fréquences, le comportement est à dominante massique, ce qui n'est pas le cas de la table d'harmonie.

Il a ensuite considéré un modèle de plaque mince homogène et isotrope qui est régie par l'équation donnée en (A.16). La simulation a été effectuée par la méthode des différences finies avec deux valeurs de module élastique E (valeurs les plus extrêmes). Pour la plus grande valeur de E (10^{10} N.m^{-2}), l'ordre de grandeur du module de l'impédance est satisfaisante pour les fréquences moyennes alors qu'il est trop élevé dans les hautes fréquences. Pour la plus petite valeur de E (4.10^8 N.m^{-2}), le module de l'impédance est trop faible dans les basses fréquences.

Il a alors considéré un modèle de plaque mince anisotrope de manière à tenir compte du sens privilégié des fibres du bois. L'équation de mouvement correspondant est donnée par (A.19). Après simulation par la méthode des différences finies, il en a conclu que les valeurs de $|Z|$ sont trop faibles en fréquences moyennes et la décroissance est trop lente en hautes fréquences. Il a ensuite pris en compte la présence de raidisseurs dans le modèle de plaque mince anisotrope. En effet, la table se comporte comme une plaque rigide en basses fréquences et comme une plaque souple dans les fréquences hautes. Pour obtenir ce type de comportement, il faut soit augmenter la valeur de E , soit augmenter l'épaisseur de la plaque. Le meilleur compromis reste toutefois l'ajout de raidisseurs, ce qui augmente la raideur dans le sens perpendiculaire aux fibres en basses fréquences

et détermine la décroissance des valeurs de l'impédance $|Z|$ en hautes fréquences. En particulier, le nombre de raidisseurs détermine la fréquence à partir de laquelle $|Z|$ commence à décroître. La raideur augmente pour les longueurs d'onde qui sont supérieures à l'espacement des raidisseurs, ce qui permet de contrôler les variations de $|Z|$ (en pratique, cela donne une table plus souple pour les petites longueurs d'onde donc pour les hautes fréquences).

La table d'harmonie est ainsi une structure complexe. Sa modélisation physique est difficile à prendre en compte dans un modèle de synthèse visant à être piloté en temps-réel. Nous allons d'ailleurs voir dans le paragraphe suivant comment la table d'harmonie est prise en compte dans les principales méthodes de simulation du son de piano.

5.3 Méthodes existantes de synthèse du son de piano

Dans ce paragraphe, je me propose de présenter les principales techniques de simulation sonore du son de piano qui sont basées sur une modélisation physique (du moins partielle) de l'instrument. Je ne traiterai pas les autres méthodes de synthèse basées sur les modèles de signaux du type méthode par synthèse additive, par synthèse soustractive ou par modulation de fréquence (les références sont nombreuses dans ce domaine, par exemple [54]). Je vais présenter successivement la méthode de simulation par résolution numérique des équations du mouvement, la méthode du *Commutated Piano Synthesis* qui a été proposée par J. O. Smith et la modélisation multi-échelles. Ces méthodes ont par ailleurs été adaptées pour d'autres instruments.

5.3.1 Résolution numérique des équations du mouvement

Une première méthode consiste à résoudre directement les équations du mouvement qui régissent le système couplé {marteau/corde/table d'harmonie}. Le comportement du marteau est décrit par l'équation suivante [21] [22] :

$$M_m \frac{d^2 \eta}{dt^2} = -F_m(t) \quad (5.4)$$

avec :

$$F_m(t) = \begin{cases} K |\eta(t) - y(x_0, t)|^p & \eta(t) \geq y(x_0, t) \\ 0 & \eta(t) < y(x_0, t) \end{cases} \quad (5.5)$$

où $\eta(t)$ est le déplacement du marteau à l'instant t , M_m la masse et F_m sa force. Les coefficients K et p sont déterminés expérimentalement. La relation entre $f(x, x_0, t)$ et F_m est donnée par :

$$f(x, x_0, t) = \frac{F_m(t)g(x, x_0)}{\rho_\ell \int_{x_0-\delta x}^{x_0+\delta x} g(x, x_0)dx} \quad (5.6)$$

où $2\delta x$ correspond à la largeur du marteau et $g(x, x_0)$ représente la distribution de la force le long de la corde.

Le déplacement transversal d'une corde au point $y(x, t)$ à l'instant t est décrit par l'équation suivante :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho_\ell} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\kappa^2 ES}{\rho_\ell} \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - 2b_1 \frac{\partial y}{\partial t} + 2b_3 \frac{\partial^3 y}{\partial t^3} + f(x, x_0, t) \quad (5.7)$$

où T est la tension appliquée, ρ_ℓ la masse linéique, κ l'angle gyrotatoire, E le module d'Young, S l'aire de la section perpendiculaire, $f(x, x_0, t)$ la force extérieure appliquée au point x_0 . Les paramètres b_1 et b_3 représentent les coefficients d'amortissement tels que le temps de décroissance est défini par la relation suivante :

$$d(\omega) = b_1 + b_3 \omega^2 \quad (5.8)$$

La corde est fixée à une extrémité et connectée à un point de la table d'harmonie à son autre extrémité. Pour prendre en compte ce fait, la table d'harmonie est approximée par une plaque mince rectangulaire simplement supportée [37]. Le déplacement z du point de contact entre la table et la corde est décrit par l'équation suivante :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\kappa^2 E}{\rho(1 - \nu^2)} \nabla^4 z - 2b_1 \frac{\partial z}{\partial t} + 2b_3 \frac{\partial^3 z}{\partial t^3} + \frac{F_c(t)}{\rho h} \delta(x_1, y_1) \quad (5.9)$$

où κ est l'angle gyroscopique, E le module d'Young, ρ la masse volumique, ν le coefficient de Poisson, h l'épaisseur, δ le symbole de Kroneker et F_c la force exercée à l'extrémité de la corde à la table qui est définie par :

$$F_c(t) = T \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x=L} \quad (5.10)$$

où L est la longueur de la corde. Il est également possible de considérer le modèle mécanique de table d'harmonie de N. Giordano décrit dans le paragraphe 5.2.2, plus élaboré que celui décrit dans le présent paragraphe.

La résolution numérique du système d'équations couplées (équation de la corde, du marteau et de la table d'harmonie) est effectuée en utilisant un schéma de différences finies explicite. Elle mène à des résultats satisfaisants [21] [22] mais cette méthode nécessite un coût de calcul important. L'implémentation en temps-réel de ce modèle est alors difficile à concevoir. Il faudrait également prendre en compte la présence de plusieurs cordes pour une note, ce qui entraîne la création de phénomènes audibles dans le son produit.

5.3.2 La méthode du *Commutated Piano Synthesis*

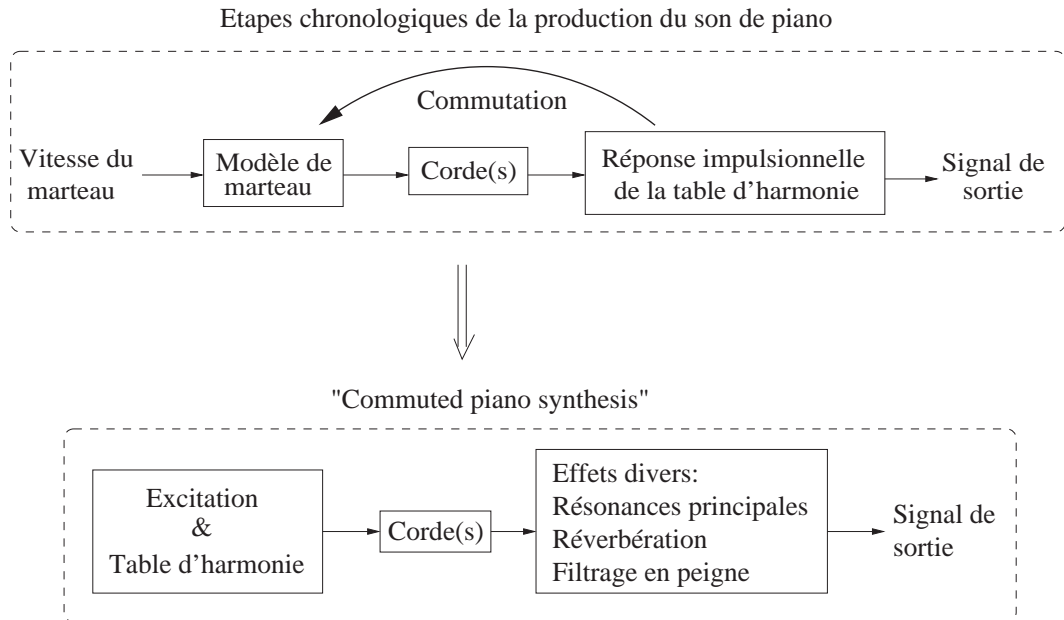


FIG. 5.4 – Principe de la méthode du *Commutated Piano Synthesis*. La contribution de la table d'harmonie est prise en compte en amont du modèle dans l'hypothèse d'un comportement linéaire. Par ailleurs, des effets supplémentaires peuvent être rajoutés comme la prise en compte de résonances principales ou de la réverbération.

Cette méthode a été proposée pour la synthèse du son de piano par J. O. Smith et S. Van Duyne [60], [61]. Elle consiste à modéliser des étapes successives de la production du son dans

l'instrument par des filtres linéaires. Parmi ces étapes de production du son, la contribution de la table d'harmonie nécessite l'implémentation d'un filtre numérique d'ordre très élevé. Elle est directement prise en compte dans l'excitation, comme le montre la figure (5.4). Afin de réduire le coût de calcul, la réponse impulsionnelle de la table d'harmonie est pré-convoluée avec le signal d'excitation du marteau et le résultat de la convolution est mis en mémoire dans une table d'ondes qu'il suffira de lire lors de la synthèse.

Si je note respectivement e , s et b les signaux d'excitation, de la corde et de la table d'harmonie, la réponse du système à l'échantillon n est donnée par la convolution de ces trois signaux :

$$h(n) = (e * s * b)(n) \quad (5.11)$$

La transformée en z de la réponse h du système s'écrit :

$$H(z) = E(z)S(z)B(z) \quad (5.12)$$

avec $E(z)$, $S(z)$ et $B(z)$ les transformées respectives des signaux d'excitation, de la corde et de la table d'harmonie. Par la propriété de commutativité de la multiplication, la relation (5.12) se réécrit :

$$H(z) = \{B(z)E(z)\}S(z) \quad (5.13)$$

La réponse du système global peut être interprétée comme une convolution entre une excitation (qui est le résultat de la convolution entre l'excitation du marteau et la réponse de la table d'harmonie) et la réponse de la corde. Avec cette méthode le temps de calcul est réduit mais l'espace mémoire requis est plus important.

La figure (5.5) représente en détail comment sont modélisés le marteau, la table d'harmonie et la corde dans cette méthode.

Modélisation de l'excitation

L'excitation correspond à la force exercée par le marteau sur la corde. L'exemple donné sur la figure (5.5) correspond au cas où le signal d'excitation présente trois bosses marquées. Physiquement, ceci correspond au fait que le marteau est resté en contact avec la corde assez longtemps pour que l'onde allant vers l'extrémité la plus proche, fasse deux allers-retours avant qu'il n'y ait plus contact. Le signal de marteau est reproduit à partir d'un générateur d'impulsions où chaque impulsion est filtrée par un filtre passe-bas. Dans le cas de la figure (5.5), trois impulsions sont considérées pour simuler les trois bosses.

Modélisation de la corde

Le modèle utilisé pour simuler le comportement vibratoire de la corde est un modèle guide d'onde élémentaire (voir chapitre 2) constitué d'une ligne à retard (simulant le temps de propagation de l'onde) et d'un filtre reproduisant les phénomènes de dissipation et de dispersion.

Modélisation de la table d'harmonie

La réponse impulsionnelle de la table d'harmonie est obtenue par filtrage évolutif d'un bruit blanc. Le principe du modèle de synthèse que j'ai présenté dans le paragraphe 4.1.1 est basé sur cette méthode. Ainsi comme je l'ai indiqué dans ce paragraphe 4.1.1, en filtrant un bruit blanc par un filtre passe-bas dont les coefficients évoluent au cours du temps, l'idée consiste à se rapprocher de la réponse impulsionnelle désirée. Par contre, la méthode d'estimation des coefficients du filtre évolutif est propre à la méthode que je propose dans les paragraphes qui suivent 4.1.1. Dans la *Commuted Piano Synthesis*, les coefficients sont estimés de manière arbitraire.

Afin de rajouter d'autres effets (réverbération, égalisation) au bruit blanc filtré, des filtres supplémentaires peuvent être pris en compte. Egalement, les résonances de plus grande amplitude

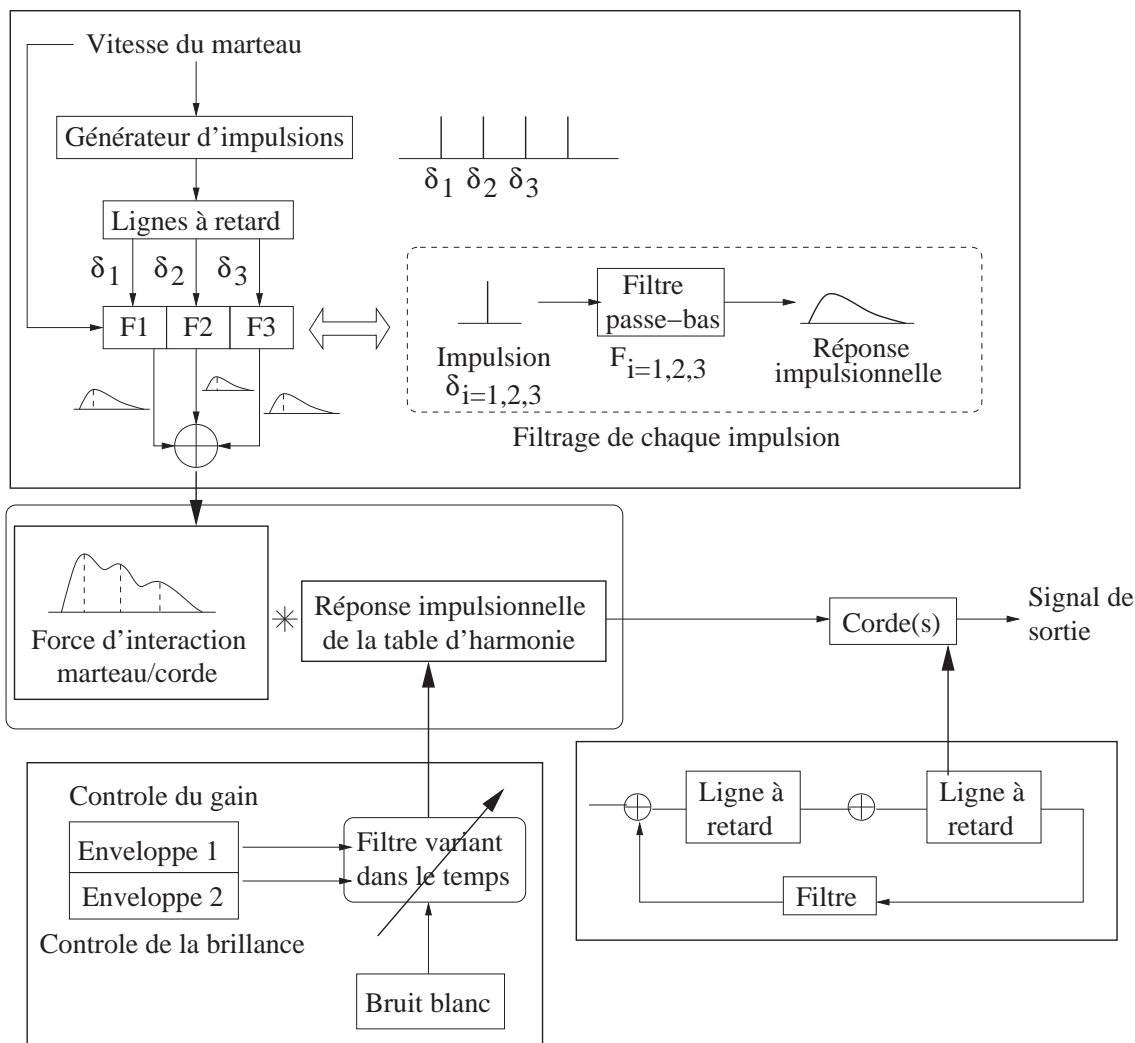


FIG. 5.5 – Modélisation des différents éléments du modèle : le marteau, la table d'harmonie et la corde.

de la table d'harmonie peuvent être pris en compte en plus du spectre large bande correspondant au bruit blanc filtré.

Cette méthode est très efficace au niveau de son implémentation mais elle ne permet pas de tenir compte des non linéarités de l'interaction marteau/corde(s). En effet, dans cette méthode, le modèle de marteau est linéarisé et il ne peut pas prédire de manière satisfaisante tous les comportements mécaniques. De plus, cette méthode ne tient pas compte des phénomènes de couplage entre les cordes d'un même chœur.

5.3.3 Modélisation multi-échelles

Une autre méthode de simulation est alors proposée par B. Bank, Sujberg et De Poli [11] [10]. Elle est basée sur un traitement du signal suivant différentes échelles de fréquences afin de réduire le temps de calcul. Une implémentation en temps réel de ce modèle est alors envisageable.

Modélisation de l'excitation

Le marteau est modélisé par un système mécanique constitué d'une masse connectée à un ressort non linéaire [13]. Les équations du mouvement qui régissent l'interaction entre le marteau et la corde sont les mêmes que celles qui sont utilisées dans le modèle décrit dans le paragraphe 5.3.1.

Modélisation de la corde

Un modèle guide d'onde unidimensionnel est utilisé pour modéliser la corde en interaction avec le marteau, comme l'illustre la figure (5.6).

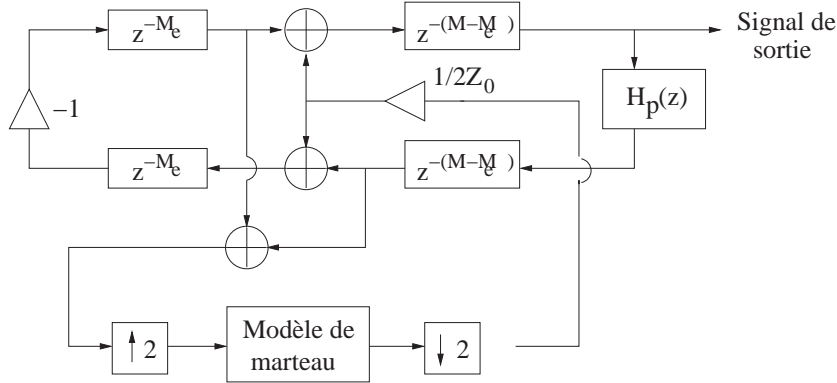


FIG. 5.6 – Modélisation de la corde en interaction avec le marteau dans une modélisation multi-échelles. Le filtre H_p représente le filtre de réflexion. Il est généralement d'ordre peu élevé (1 à 5) à part pour les notes très graves.

Le coût de calcul est réduit par une opération de sous-échantillonnage du signal qui est rendue possible par le fait que ce dernier contient peu d'énergie dans les hautes fréquences (surtout pour les notes aiguës). Les résonances sympathiques des cordes (qui se traduisent par des battements dans le son produit) sont prises en compte dans le modèle. Pour produire cet effet, deux résonateurs sont couplés légèrement désaccordés par rapport aux fréquences de résonance respectives.

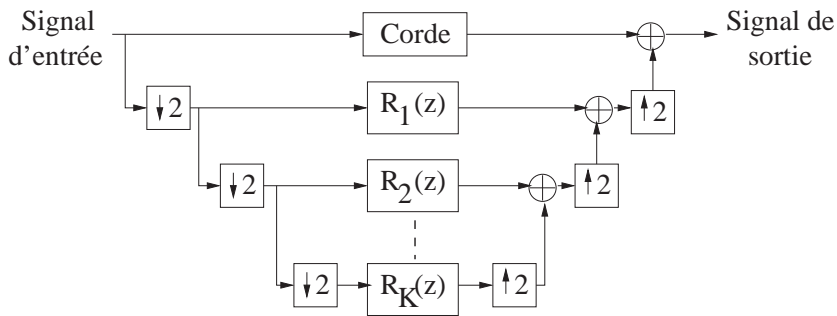


FIG. 5.7 – Prise en compte des résonances sympathiques des cordes.

La figure (5.7) représente le couplage entre les résonateurs. $R_{i=1,\dots,K}$ représentent des résonateurs du second degré. Ils sont mis en parallèle avec le modèle de corde. Les fonctions de transfert des résonateurs s'écrivent :

$$R_k(z) = \frac{\text{Re}\{a_k\} - \text{Re}\{a_k \overline{p_k}\} z^{-1}}{1 - 2\text{Re}\{p_k\} z^{-1} + |p_k|^2 z^{-2}} \quad (5.14)$$

avec

$$a_k = A_k e^{j\phi_k} \quad \text{et} \quad p_k = e^{j \frac{2\pi f_k}{f_e} - \frac{1}{f_e \tau_k}} \quad (5.15)$$

où A_k , ϕ_k , f_k et τ_k sont respectivement l'amplitude initiale, la phase initiale, la fréquence et le temps de décroissance du k ième résonateur. f_e correspond à la fréquence d'échantillonnage.

Modélisation de la table d'harmonie

La réponse impulsionnelle de la table d'harmonie est approchée par un filtre numérique. Son rôle d'élément de couplage entre les cordes est pris en compte dans le modèle de corde. Comme il a été dit précédemment, la table d'harmonie génère un spectre riche et la simulation de sa réponse impulsionnelle nécessite un filtre d'ordre élevé.

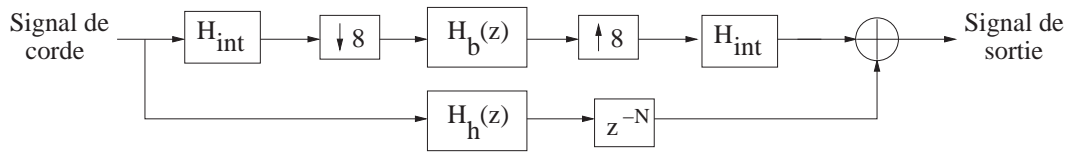


FIG. 5.8 – Modélisation de la table d'harmonie par une approche multi-échelles.

Afin de contourner ce problème, le spectre correspondant au signal de la corde (l'entrée du modèle de la table d'harmonie) est divisé en deux parties distinctes, comme le montre la figure (5.8). La partie basse fréquence du spectre (jusqu'à 2 kHz environ) est sous-échantillonnée d'un facteur huit puis convoluée par un filtre à réponse impulsionnelle finie noté $H_b(z)$ d'ordre élevé. Pour la partie haute fréquence du signal, seulement l'enveloppe spectrale de la réponse en fréquence de la table d'harmonie est modélisée par un filtre à réponse impulsionnelle finie noté $H_h(z)$ d'ordre moins élevé. La fréquence de transition de 2 kHz a été choisie de manière expérimentale suite à des considérations psychoacoustiques. Pour la partie hautes fréquences, un retard de N échantillons est introduit de manière à compenser le temps nécessaire au sous-échantillonnage puis au suréchantillonnage. A l'entrée puis à la sortie du modèle, un filtre d'interpolation H_{int} est introduit (en anglais *equiripple linear-phase filter*).

Les filtres $H_b(z)$ et $H_h(z)$ sont déterminés à partir de mesures expérimentales consistant à exciter la table d'harmonie d'un piano avec un marteau force et de mesurer le champ acoustique avec un microphone (positionné à quelques mètres du piano). A partir des deux signaux expérimentaux, une fonction de transfert est calculée puis approximée par un filtre $H_t(z)$ d'ordre 2000. $H_t(z)$ est ensuite sous-échantillonnée d'un facteur huit, ce qui permet d'obtenir un filtre $\tilde{H}_b(z)$ d'ordre 250. Le filtre $H_b(z)$ à implémenter dans le modèle est déterminé par :

$$H_b(z) = \tilde{H}_b(z) \frac{1}{H_{int}^2(z^{\frac{1}{8}})} \quad (5.16)$$

Le filtre $H_h(z)$ est obtenu en soustrayant le filtre estimé $H_b(z)$ à la fonction de transfert expérimentale. $H_h(z)$ est alors de l'ordre de 50. En comparant la fonction de transfert obtenue par l'estimation des filtres et celle obtenue expérimentalement, l'allure des deux courbes est préservée jusqu'à 2 kHz. Dans la partie hautes fréquences, seule l'enveloppe spectrale est reproduite.

Les signaux temporels obtenus sont satisfaisants. Toutefois, l'attaque des notes aigües est plus brève si l'on utilise la fonction de transfert estimée par les filtres. Ceci est dû au fait que le filtre estimé au-dessus de 2 kHz comporte 50 coefficients et l'énergie de la table d'harmonie est concentrée sur 1.1 ms (avec une fréquence d'échantillonnage de 44100 Hz).

Un modèle complet de piano a donc été proposé par le groupe de B. Bank. Il peut toutefois être amélioré en introduisant des modèles du type réseau récuratif de lignes à retard (paragraphe

3.1.1), en sous-échantillonnant davantage, ou alors en utilisant les *Warped Filters* [38], conçus pour travailler sur un axe de fréquences non linéaire.

5.4 Simulation de la réponse impulsionnelle de la table d'harmonie

Dans ce paragraphe, je me propose de simuler la réponse impulsionnelle de la table d'harmonie d'un piano à queue en utilisant le modèle de synthèse décrit dans le chapitre 4. Ce dernier se base sur le concept de la *Commutated Piano Synthesis*. Le concept du filtrage évolutif est en effet utilisé dans la méthode décrite par J. O. Smith mais dans notre cas, les paramètres du modèle seront directement estimés de l'analyse de signaux expérimentaux suivant les méthodes décrites dans le paragraphe 4.2.

Pour cela, des mesures expérimentales de réponses impulsionnelles ont été effectuées sur un piano à queue, en excitant la table avec un marteau-force et en mesurant les vibrations transversales avec un accéléromètre. La table étant excitée par la vibration des cordes au niveau des chevalets, l'excitation est effectuée à ce niveau. Par contre, les points de mesures sont plus délicats à déterminer.

La figure (5.9) nous permet de comparer le signal d'accéléromètre mesuré et le signal de sortie du modèle de synthèse après calage des paramètres suivant les méthodes décrites dans le paragraphe 4.2. Les représentations temps-échelle des signaux ne sont pas identiques. Comme dans l'exemple donnée dans le chapitre précédent, le processus de calage du filtre évolutif est effectué au mieux, compte tenu du faible nombre de coefficients. Il tend à être amélioré par la suite.

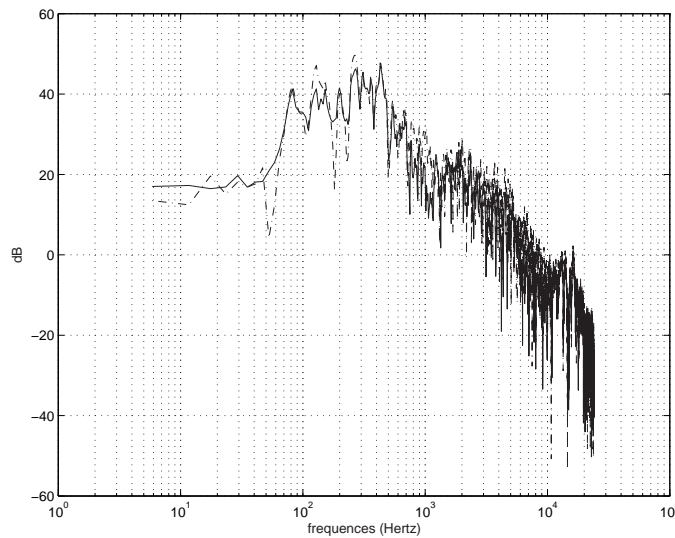


FIG. 5.9 – Spectre du signal d'accéléromètre mesuré (représenté en trait plein) et spectre du signal de sortie du modèle de synthèse (représenté en traits pointillés) exprimés en dB. L'axe des fréquences est logarithmique.

La simulation de la réponse impulsionnelle de la table d'harmonie par cette méthode est efficace d'autant plus que les paramètres peuvent être estimés à partir de l'analyse d'un signal de mesure. Cette réponse doit être convoluée avec le signal vibratoire des cordes. Cette réponse vivant sur un nombre de points important, l'opération de convolution est coûteuse en temps de calcul. Cette conclusion m'a ainsi orienté vers une autre approche de la modélisation de la table

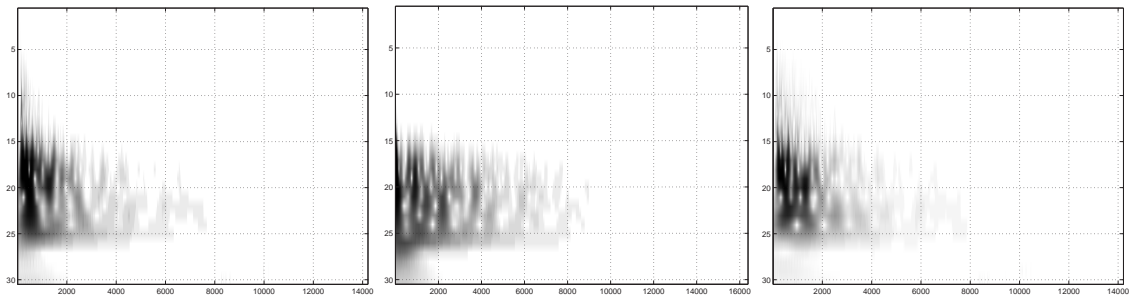


FIG. 5.10 – Représentations temps-échelle du signal de mesure (figure de gauche), du signal de synthèse obtenu avec le modèle représenté sur la figure (4.2) utilisant la synthèse additive (figure du milieu) et celui obtenu avec le modèle représenté sur la figure (4.3) (figure de droite). L'axe des abscisses est exprimé en nombre d'échantillons et l'axe des ordonnées correspond au paramètre d'échelle.

d'harmonie dans la synthèse du son de piano. La table d'harmonie est une structure multidimensionnelle complexe et peut être caractérisée par sa réponse impulsionnelle. Contrairement aux instruments percussifs, cette structure est excitée par un signal particulier qui est la vibration des cordes au niveau du chevalet. Il suffit ainsi de connaître la contribution de la table d'harmonie dans la production du son aux modes de résonance des cordes et la détermination d'une réponse impulsionnelle n'est donc pas nécessaire.

Dans les paragraphes précédents, nous avons vu que la table d'harmonie contribue à la production du son de piano principalement de deux manières : elle constitue un élément de couplage entre les cordes qui permet la résonance sympathique et elle transforme l'énergie mécanique des cordes en énergie acoustique rayonné dans le milieu environnant. Il est donc pertinent de considérer un modèle de cordes (déjà existant) et de prendre en compte ces contributions par l'ajout de filtres.

5.5 Prise en compte de la contribution de la table d'harmonie dans un modèle de vibrations de cordes couplées

Le modèle de cordes décrit dans ce paragraphe a été mis en œuvre avec la collaboration d'autres membres de l'équipe (voir les co-auteurs de l'article annexé en C). Le modèle présenté sur la figure (5.11) simule le comportement vibratoire d'un système de deux cordes couplées par la table d'harmonie (via le chevalet). La prise en compte du couplage sympathique entre deux cordes d'un même chœur est perceptivement importante. Les battements audibles constituent une caractéristique importante du son de piano. Dans le cas des notes graves où il n'y a qu'une corde par note, les phénomènes de battements sont dus au couplage entre les modes orthogonaux de la corde. Le modèle présenté est basé sur le concept du guide d'onde numérique.

5.5.1 Modèle de deux cordes couplées

Le modèle guide d'onde présenté sur la figure (5.11) simule les vibrations transversales d'un système de deux cordes de piano couplées par le chevalet.

La fonction de transfert de ce modèle est donné par :

$$T(\omega) = \frac{S(\omega)}{E(\omega)} = \frac{G_1(\omega)}{1 - C_1(\omega)C_2(\omega)G_1(\omega)G_2(\omega)} \quad (5.17)$$

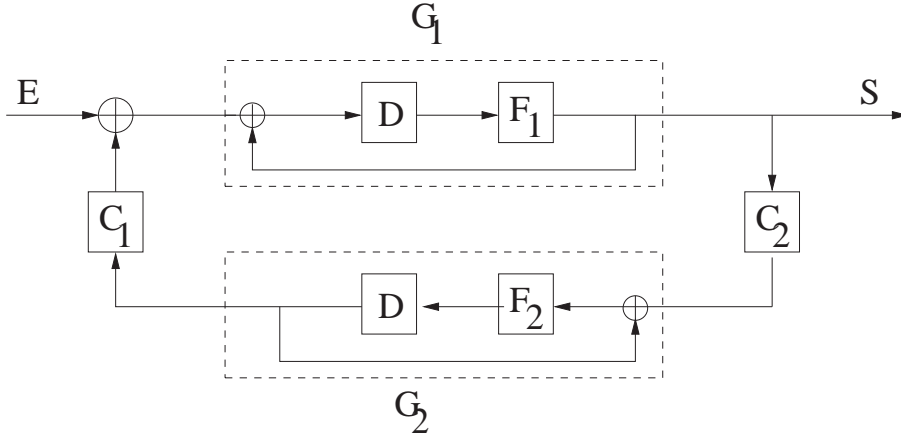


FIG. 5.11 – *Modèle guide d'onde simulant un système de deux cordes de piano couplées par la table d'harmonie (via les chevalets) : E représente le signal d'entrée, S le signal de sortie, C₁ et C₂ le filtre de couplage, G₁ et G₂ les modèles guide d'onde élémentaires représentant les deux cordes.*

avec
$$G_i(\omega) = \frac{F_i(\omega)e^{-i\omega d}}{1 - F_i(\omega)e^{-i\omega d}} \quad i \in [1,2].$$

Les expressions des filtres (en particulier celles des filtres de couplage) du modèle sont estimées à partir de l'identification du signal de sortie du modèle à une double somme de sinusôides exponentiellement amorties. Dans le domaine fréquentiel, cela revient à identifier la fonction de transfert écrite en (5.17) à une double somme de lorentziennes :

$$S(\omega) = \sum_k \frac{a_k}{\alpha_k + i(\omega - \omega_{1k})} + \frac{b_k}{\beta_k + i(\omega - \omega_{2k})} \quad (5.18)$$

où a_k et b_k sont les amplitudes, α_k et β_k les coefficients d'amortissement, ω_{1k} et ω_{2k} les pulsations propres de la composante k . La fonction de transfert $T(\omega)$ peut se réécrire sous une somme de deux fractions rationnelles simples :

$$T(\omega) = \frac{P(\omega)e^{-i\omega d}}{1 - X(\omega)e^{-i\omega d}} + \frac{Q(\omega)e^{-i\omega d}}{1 - Y(\omega)e^{-i\omega d}} \quad (5.19)$$

En identifiant les termes de (5.17) et de (5.19), les paramètres $\{P, Q, X, Y\}$ peuvent être exprimés en fonction de $\{C_1, C_2, G_1, G_2\}$. On obtient finalement :

$$\left\{ \begin{array}{l} X(\omega) = \frac{F_1(\omega) + F_2(\omega)}{2} + \sqrt{\left(\frac{F_1(\omega) - F_2(\omega)}{2}\right)^2 + F_1(\omega)F_2(\omega)C_1(\omega)C_2(\omega)} \\ Y(\omega) = \frac{F_1(\omega) + F_2(\omega)}{2} - \sqrt{\left(\frac{F_1(\omega) - F_2(\omega)}{2}\right)^2 + F_1(\omega)F_2(\omega)C_1(\omega)C_2(\omega)} \\ P(\omega) = \frac{F_1(\omega)(F_2(\omega) - X(\omega))}{Y(\omega) - X(\omega)} \\ Q(\omega) = \frac{F_1(\omega)(Y(\omega) - F_2(\omega))}{Y(\omega) - X(\omega)} \end{array} \right. \quad (5.20)$$

En posant $X(\omega) = |X(\omega)| e^{i\phi_X(\omega)}$ et $Y(\omega) = |Y(\omega)| e^{i\phi_Y(\omega)}$, on peut identifier localement

autour de chaque résonance k :

$$\begin{cases} \frac{P(\omega)e^{-i\omega d}}{1 - |X(\omega)| e^{-i(\omega d - \phi_X(\omega))}} \approx \frac{a_k}{\alpha_k + i(\omega - \omega_{1k})} \\ \frac{Q(\omega)e^{-i\omega d}}{1 - |Y(\omega)| e^{-i(\omega d - \phi_Y(\omega))}} \approx \frac{b_k}{\beta_k + i(\omega - \omega_{2k})} \end{cases} \quad (5.21)$$

Pour l'estimation des paramètres, les principes de calcul sont les mêmes que ceux décrits dans les chapitres précédents (paragraphe 2.2.2 par exemple). Les relations suivantes peuvent alors être déduites :

$$a_k = \frac{P(\omega_{1k})}{DX(\omega_{1k})} ; \quad b_k = \frac{Q(\omega_{2k})}{DY(\omega_{2k})} ; \quad \alpha_k = \frac{1 - |X(\omega_{1k})|}{D |X(\omega_{1k})|} ; \quad \beta_k = \frac{1 - |Y(\omega_{2k})|}{D |Y(\omega_{2k})|} \quad (5.22)$$

Dans le cadre d'analyse-synthèse, les paramètres du modèle reliés à la table d'harmonie sont estimés à partir de l'analyse de signaux réels. Pour cela, une campagne de mesure a été effectuée sur un piano à queue Yamaha Disklavier du laboratoire placé en chambre anéchoïque.

5.5.2 Mesures expérimentales

Les mesures consistent à déterminer expérimentalement les contributions de la table d'harmonie. En particulier, des mesures vibratoires de cordes au niveau du chevalet et des mesures de pression acoustique ont été réalisées. Le protocole expérimental est le suivant : pour les 88 notes du clavier, nous avons mesuré simultanément les vibrations des cordes (caractérisant le rôle vibratoire de la table) au niveau du chevalet avec un accéléromètre et la pression acoustique (caractérisant le champ rayonné par la table) au niveau des oreilles de l'instrumentiste virtuel avec une tête artificielle.

La mise en place de tous les éléments ainsi que le protocole de mesures sont montrés sur la figure (5.12) et sur les photos (5.13). A l'extérieur de la chambre anéchoïque, un poste de travail a été mis en place et a permis de piloter le piano Disklavier à distance de manière à ce que le champ rayonné ne soit pas perturbé par une présence humaine. Les paramètres de pilotage sont la note jouée et la vitesse du marteau. Ils sont définis par l'intermédiaire d'un programme Max-MSP puis sont envoyés au piano par le biais d'une interface MIDI (Musical Instrument Digital Interface). Le système Disklavier ne pouvant reproduire exactement les paramètres voulus, les valeurs qui ont été réellement effectuées par le piano sont renvoyées au poste de travail. Les détails du matériel utilisé sont présentés dans l'annexe B. A chaque note, est associé un ensemble de trois signaux expérimentaux : le signal d'accélération du chevalet et les deux signaux de pression acoustique au niveau des oreilles d'un pianiste.

5.5.3 La table d'harmonie comme élément de couplage entre les cordes

La table d'harmonie joue un rôle important dans le comportement vibratoire de la corde. Elle constitue un élément de couplage qui permet le transfert d'énergie d'une corde à l'autre dans un même chœur. Sa contribution apparaît dans les valeurs des filtres de couplage du modèle couplé présenté dans le paragraphe 5.5.1. A partir des signaux expérimentaux, les paramètres d'amplitudes, de fréquences propres et de coefficients d'amortissement $\{\tilde{a}_k, \tilde{b}_k, \tilde{\alpha}_k, \tilde{\beta}_k, \tilde{\omega}_{1k}, \tilde{\omega}_{2k}\}$ sont estimés par des méthodes d'analyse comme celles décrites dans le chapitre 1. En pratique, chaque multiplet k a été isolé par un filtrage passe-bande et on a supposé qu'il était constitué d'une double résonance. La méthode Steiglitz-Mac Bride, décrite dans le paragraphe 1.5.1, a été utilisée pour déterminer les paramètres de chaque composante du doublet.

Il est alors possible d'exprimer les paramètres de filtres du modèle guide d'onde de cordes couplées en fonction de ces paramètres extraits de l'analyse. Ces paramètres issus de l'analyse

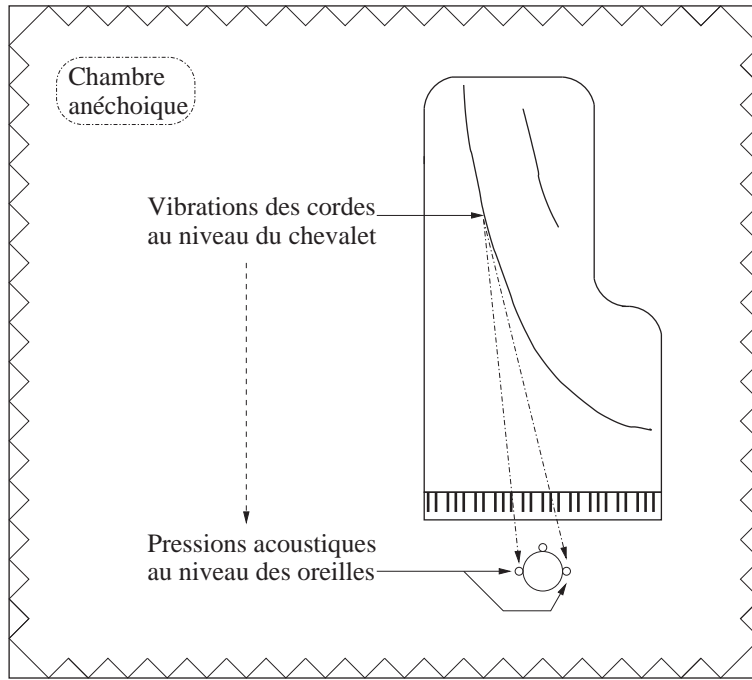


FIG. 5.12 – Vue de haut du protocole expérimental qui a été mis en place : pour les 88 notes du clavier, on mesure simultanément les vibrations des cordes au niveau du chevalet avec un accéléromètre et la pression acoustique au niveau des deux oreilles d'un pianiste virtuel avec une tête artificielle. Le grand piano Disklavier Yamaha a été placé en chambre anéchoïque.

sont notés $\{\tilde{a}_k, \tilde{b}_k, \tilde{\alpha}_k, \tilde{\beta}_k, \tilde{\omega}_{1k}, \tilde{\omega}_{2k}\}$. A partir des relations (5.22), on en déduit :

$$|X(\omega_{1k})| = \frac{1}{\tilde{\alpha}_k D + 1} ; |Y(\omega_{2k})| = \frac{1}{\tilde{\beta}_k D + 1} \quad (5.23)$$

A partir des expressions des fréquences propres de chaque doublet, on en déduit les phases de X et Y :

$$\phi_X(\omega_{1k}) = \tilde{\omega}_{1k} D - 2k\pi ; \phi_Y(\omega_{2k}) = \tilde{\omega}_{2k} D - 2k\pi \quad (5.24)$$

Les paramètres X et Y sont donc entièrement connus. Connaissant les valeurs de \tilde{a}_k et \tilde{b}_k , on en déduit des relations écrites en (5.22):

$$\frac{P(\omega_{1k})}{Q(\omega_{2k})} = \frac{\tilde{a}_k X(\omega_{1k})}{\tilde{b}_k Y(\omega_{2k})} \quad (5.25)$$

En utilisant les définitions de P et Q données en (5.20) :

$$\frac{P(\omega)}{Q(\omega)} = \frac{F_2(\omega) - X(\omega)}{Y(\omega) - F_2(\omega)} \quad (5.26)$$

Par ailleurs, en supposant pour chaque double résonance que les fréquences propres ω_{1k} et ω_{2k} ont des valeurs très proches, on peut alors écrire :

$$X(\omega_{1k}) \approx X(\omega_{2k}) ; Y(\omega_{1k}) \approx Y(\omega_{2k}) ; P(\omega_{1k}) \approx P(\omega_{2k}) ; Q(\omega_{1k}) \approx Q(\omega_{2k}) \quad (5.27)$$

On obtient alors l'expression du filtre F_2 aux fréquences de résonance avec la relation (5.26) :

$$F_2(\omega_{1k}) \approx F_2(\omega_{2k}) \approx \frac{(\tilde{a}_k + \tilde{b}_k)X(\omega_{1k})Y(\omega_{2k})}{\tilde{a}_k X(\omega_{1k}) + \tilde{b}_k Y(\omega_{2k})} \quad (5.28)$$



FIG. 5.13 – Photos du dispositif expérimental montrant le piano à queue dans la chambre anéchoïque du laboratoire : vue d'ensemble (photo du haut) et vue rapprochée (photo du bas).

En utilisant les relations en (5.20) qui permettent d'écrire :

$$X(\omega) + Y(\omega) = F_1(\omega) + F_2(\omega) \quad (5.29)$$

on obtient l'expression du filtre F_1 aux fréquences de résonance :

$$F_1(\omega_{1k}) \approx F_1(\omega_{2k}) \approx \frac{\tilde{a}_k X^2(\omega_{1k}) + \tilde{b}_k Y^2(\omega_{2k})}{\tilde{a}_k X(\omega_{1k}) + \tilde{b}_k Y(\omega_{2k})} \quad (5.30)$$

Toujours en utilisant les relations en (5.20), on écrit :

$$X(\omega)Y(\omega) = F_1(\omega)F_2(\omega)(1 - C_1(\omega)C_2(\omega)) \quad (5.31)$$

et on en déduit l'expression du produit des deux filtres de couplage :

$$C_1(\omega_{1k})C_2(\omega_{1k}) \approx C_1(\omega_{2k})C_2(\omega_{2k}) \approx \frac{\tilde{a}_k \tilde{b}_k (X(\omega_{1k}) - Y(\omega_{2k}))^2}{(\tilde{a}_k + \tilde{b}_k)(\tilde{a}_k X^2(\omega_{1k}) + \tilde{b}_k Y^2(\omega_{2k}))} \quad (5.32)$$

La figure (5.14) représente le module du filtre de couplage C dans le cas où $C_1 = C_2$ pour la note B1. Les résonances correspondent aux fréquences où le couplage est important.

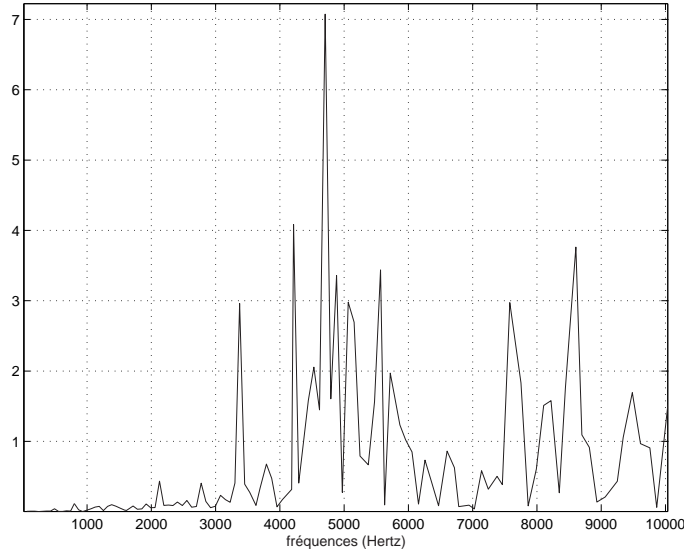


FIG. 5.14 – Module du filtre de couplage en fonction de la fréquence pour la note B1.

Un modèle guide d'onde constitué de trois guides d'onde élémentaires couplés pour un chœur comportant trois cordes (à partir de la note *Gd1*), a été également mis en œuvre durant la thèse de J. Bensa [12]. Les paramètres des filtres (notamment des filtres de couplage) ont été estimés d'une manière similaire à celle présentée précédemment.

Par ailleurs, une expérience a été menée pour étudier spécifiquement les phénomènes de couplage entre deux cordes de piano. Pour cela, un banc d'essai calibré a été élaboré sur lequel deux cordes de piano ont été montées de telle sorte que leur condition d'appui se rapproche le plus possible de celle d'un vrai piano. Les deux cordes sont ainsi tendues entre un sillet (appui fixe) et un chevalet (appui mobile). Le sillet et le chevalet ont été prélevé sur un piano Gaveau. Les cordes peuvent être accordées comme sur un vrai piano au niveau de la cheville avec une clé d'accord classique. Le modèle présenté dans ce chapitre a été utilisé pour étudier le comportement vibratoire de ce système de deux cordes couplées. Le protocole expérimental et les détails de calcul sont présentés dans l'article consultable en annexe C de ce document. Les résultats présentés dans cet article permettent de mettre en évidence une corrélation entre les filtres de couplage estimés et les résonances présentes dans la courbe d'impédance du chevalet (voir figures (10) et (11) de l'article).

5.5.4 La table d'harmonie comme amplificateur

La deuxième principale fonction de la table d'harmonie est de rayonner dans le milieu environnant l'énergie vibratoire transmise par l'ensemble des cordes. Cette contribution peut être

caractérisée par la détermination de fonctions de transfert en supposant que le comportement de la table est linéaire (hypothèse justifiée dans la mesure où les déplacements transversaux de la table sont petites devant ses dimensions). Etant donnée l'ordre de grandeur des déplacements transversaux de la table lorsqu'elle est excitée par les cordes, on peut dire que cette hypothèse est réaliste. Une fois ces fonctions de transfert déterminées, il suffira ensuite de les rajouter (au moyen d'un filtre) au modèle de cordes couplées pour recréer le champ acoustique rayonné. Dans la mesure où l'on veut recréer artificiellement l'illusion perceptive que l'on est en train de jouer du piano, il est nécessaire de privilégier le champ acoustique au niveau de la tête d'un pianiste virtuel. On se propose ainsi de restituer le champ rayonné au niveau de la tête d'un pianiste, ce qui est à première vue important dans le cadre de la réalité virtuelle.

A partir des signaux expérimentaux, il est alors possible de déterminer deux fonctions (une pour chaque oreille) qui caractérisent la propagation des vibrations issues du chevalet jusqu'aux oreilles du pianiste, comme l'indique la figure (5.15). Les fonctions à déterminer sont les réponses impulsionnelles que je note $h_d(t)$ (correspondant à l'oreille droite) et $h_g(t)$ (correspondant à l'oreille gauche), caractéristiques du système {table d'harmonie / rayonnement}. Elles vérifient les relations suivantes :

$$\begin{cases} s_d(t) = (h_d * e)(t) \\ s_g(t) = (h_g * e)(t) \end{cases} \quad (5.33)$$

avec $e(t)$ le signal vibratoire des cordes.

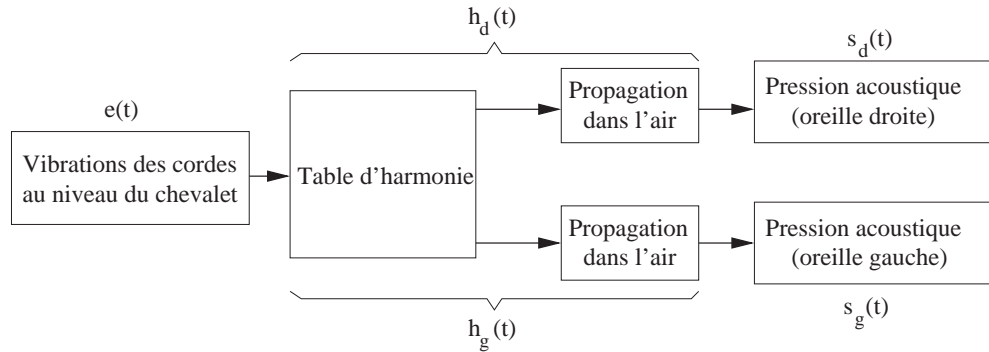


FIG. 5.15 – A partir des signaux correspondant aux vibrations des cordes au niveau du chevalet et aux pressions acoustiques au niveau des oreilles d'un pianiste, il est possible de déterminer deux fonctions de transfert (une pour chaque oreille) caractéristiques du système {table d'harmonie / rayonnement}. Je suppose que le système physique correspondant est linéaire afin de vérifier la condition d'existence d'une fonction de transfert.

Je note les deux fonctions de transfert correspondantes à $h_d(t)$ et $h_g(t)$, respectivement $T_d(\omega)$ et $T_g(\omega)$, et elles doivent satisfaire les relations suivantes :

$$\begin{cases} S_d(\omega) = T_d(\omega)E(\omega) \\ S_g(\omega) = T_g(\omega)E(\omega) \end{cases} \quad (5.34)$$

avec $E(\omega)$, la transformée de Fourier du signal d'accélération des cordes au niveau du chevalet, $S_d(\omega)$, la transformée de Fourier du signal de pression acoustique au niveau de l'oreille droite et $S_g(\omega)$, la transformée de Fourier du signal de pression acoustique au niveau de l'oreille gauche.

Le problème consiste à estimer les fonctions $T_d(\omega)$ et $T_g(\omega)$. Pour cela, différentes méthodes existent. La plus simple consiste à les estimer directement à partir des rapports entre les transformées de Fourier d'après la relation (5.34).

Méthode spectrale

Ainsi, connaissant (5.34), les fonctions de transfert sont données par :

$$\begin{cases} T_d(\omega) = \frac{S_d(\omega)}{E(\omega)} \\ T_g(\omega) = \frac{S_g(\omega)}{E(\omega)} \end{cases} \quad (5.35)$$

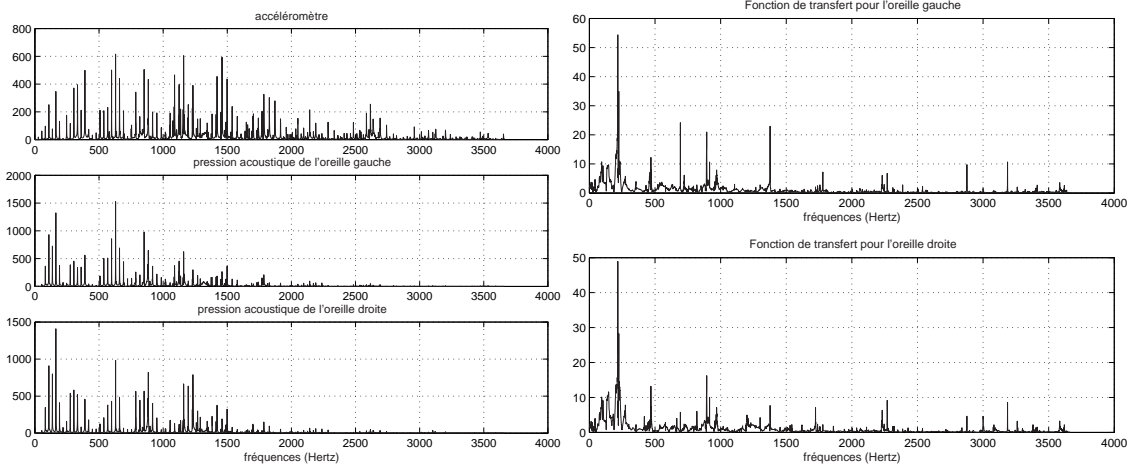


FIG. 5.16 – **Figures de gauche** : Modules des spectres correspondant aux signaux d'accéléromètre (figure du haut), de pression acoustique au niveau de l'oreille gauche (figure du milieu) et de pression acoustique au niveau de l'oreille droite (figure du bas) pour la note A0 en fonction des fréquences. **Figures de droite** : Modules des deux fonctions de transfert obtenues par division entre les transformées de Fourier suivant les relations en (5.35) en fonction des fréquences.

La figure (5.16) montre les résultats d'estimation des fonctions de transfert obtenus avec cette méthode pour un ensemble de signaux correspondant à la note A0. A cause des nombreuses anti-résonances présentes dans les spectres, les fonctions de transfert ainsi obtenues ne peuvent pas être utilisées de manière pertinente.

La méthode spectrale n'est pas satisfaisante pour déterminer les fonctions de transfert. Ce type de méthode est valable pour déconvoluer des signaux donc les spectres sont relativement lisses et continus (ou alors des spectres ayant des anti-résonances peu marquées). Il existe par ailleurs des méthodes temporelles qui permettent de déconvoluer deux signaux.

Méthodes temporelles

Les méthodes temporelles sont dans la plupart des cas, basées sur l'estimation de filtres numériques à réponse impulsionnelle finie (filtre FIR) ou infinie (filtre IIR) qui s'écrivent [42] :

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\sum_{\ell=0}^L \beta_{\ell} z^{-\ell}}{1 + \sum_{k=1}^K \alpha_k z^{-k}} \quad (5.36)$$

Le problème revient à estimer la valeur des coefficients $\{\alpha_k; \beta_{\ell}\}$.

Dans le cas d'un filtre FIR, les coefficients α_k sont nuls et la réponse impulsionnelle s à l'échantillon n s'écrit :

$$s(n) = \sum_{\ell=0}^L \beta_{\ell} e(n - \ell) \quad (5.37)$$

Les coefficients sont estimés avec la méthode LMS qui sera décrite plus loin.

Dans le cas plus général d'un filtre IIR, la réponse impulsionnelle s à l'échantillon n s'écrit :

$$s(n) = \sum_{\ell=0}^L \beta_{\ell} e(n - \ell) - \sum_{k=1}^K \alpha_k s(n - k) \quad (5.38)$$

Les coefficients peuvent être calculés en utilisant des algorithmes basés sur des méthodes de régression linéaire. *L'égalisation à phase minimale* n'est pas une bonne option car elle conduit à un son qui ne semble pas naturel et l'attaque n'est pas réaliste.

Une autre alternative est apparue sous le nom de *Warped Filter* [38]. Elle consiste à considérer des critères psychoacoustiques et d'estimer des filtres FIR ou IIR en privilégiant la contribution d'un domaine particulier de fréquence du spectre. L'estimation est effectuée sur une échelle non linéaire en fréquence. Le retard unité z^{-1} communément utilisé lors de l'implémentation en temps réel est remplacé par un filtre passe-tout $D(z)$ défini par :

$$z^{-1} \longrightarrow D(z) = \frac{z^{-1} - \lambda}{1 - \lambda z^{-1}} \quad (5.39)$$

On note que si $\lambda = 0$, on retrouve le retard unité. La relation de correspondance entre l'échelle des *Hertz* et celle choisie par l'utilisateur en fonction des différentes contraintes s'écrit :

$$\omega' = \arctan \frac{(1 - \lambda^2) \sin(\omega)}{(1 + \lambda^2) \cos(\omega) - 2\lambda} \quad (5.40)$$

avec ω' représente la nouvelle échelle des fréquences. Pour une valeur spécifique de la grandeur λ , il est possible de reconstruire l'échelle employée par l'oreille humaine, l'échelle des *Bark*. Cette valeur spécifique est donnée par la relation suivante en fonction de la fréquence d'échantillonnage f_e :

$$\lambda_{Bark} \approx 1.0674 \left(\frac{2}{\pi} \arctan(0.06583 f_e) \right)^{1/2} - 0.1916 \quad (5.41)$$

Par exemple, pour $f_e = 44100$, $\lambda_{Bark} = 0.756$.

Suivant les cas, l'utilisation de ces filtres permettent une réduction du nombre de coefficients d'un facteur deux à dix. Toutefois, les *Warped Filters* nécessitent l'implémentation d'un module élémentaire $D(z)$. Par ailleurs, des instabilités numériques peuvent apparaître surtout lorsque l'on considère des filtres d'ordre élevé.

Dans tous les cas, le problème revient à estimer les coefficients de filtres. Pour cela, les méthodes d'estimation sont nombreuses. Dans le paragraphe suivant, je me propose de décrire un exemple de méthode basée sur la minimisation au sens des moindres carrés.

Méthode LMS La méthode des moindres carrés vise à évaluer les coefficients d'un filtre FIR. A partir de deux signaux notés $e(t)$ et $s(t)$, l'estimation de la partie corrélée permet alors de déterminer une fonction caractéristique notée $h(t)$, comme l'indique la figure (5.17).

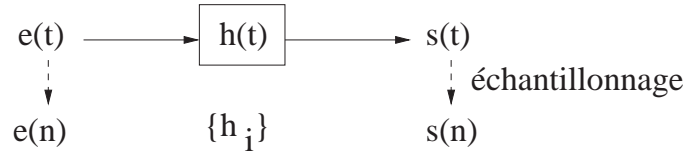


FIG. 5.17 – La méthode des moindres carrés vise à évaluer à partir de deux signaux $e(t)$ et $s(t)$, la partie corrélée et d'estimer alors une fonction caractéristique notée $h(t)$. Après échantillonnage, cette fonction h s'exprime sous la forme d'un filtre numérique à réponse impulsionnelle finie.

En pratique, le signal $e(t)$ correspond au signal d'accéléromètre et le signal $s(t)$ correspond à $s_g(t)$ ou bien $s_d(t)$. Après échantillonnage, cette fonction h s'exprime sous la forme d'un filtre à réponse impulsionnelle finie telle que :

$$s(n) = (h * e)(n) = \sum_{i=0}^N h_i e(n - i) \quad (5.42)$$

Les coefficients h_i sont déterminés en minimisant une fonctionnelle \mathcal{E} qui est définie de la manière suivante :

$$\mathcal{E} = \text{Esp}\{ | s(n) - \sum_{i=0}^N h_i e(n - i) |^2 \} \quad (5.43)$$

où Esp représente l'espérance mathématique. La dérivée de \mathcal{E} doit donc être nulle aux valeurs h_i :

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial h_i} = -2 \text{Esp} [s(n) e(n - i) - \sum_{k=0}^N h_k e(n - k) e(n - i)] = 0, \quad \forall i \quad (5.44)$$

La relation précédente peut être réécrite sous forme matricielle :

$$\mathbf{R}h = d \quad (5.45)$$

avec :

$$\begin{cases} R_{ij} = \text{Esp}[e(n - j)e(n - i)] \\ d_i = \text{Esp}[s(n)e(n - i)] \end{cases} \quad (5.46)$$

A partir de la relation (5.45), l'ensemble des valeurs h_i est alors déterminé à condition de pouvoir inverser la matrice \mathbf{R} :

$$h = \mathbf{R}^{-1}d \quad (5.47)$$

En pratique, la méthode utilisée est celle du gradient. A partir d'une valeur initiale de chaque coefficient h_i , on calcule sa valeur à l'instant suivant :

$$h_i^{(n+1)} = h_i^{(n)} - \mu \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial h_i}^{(n)} \quad (5.48)$$

avec μ , le pas d'espace, jusqu'à ce que la différence $| h_i^{(n+1)} - h_i^{(n)} |$ soit inférieure à une certaine valeur donnée.

Les figures en (5.18) représentent les résultats obtenus avec la méthode LMS pour la note A0. Il est nécessaire de considérer environ 2000 coefficients pour obtenir un son de synthèse satisfaisant.

L'approximation des fonctions de transfert avec un filtre IIR donne les résultats représentés sur la figure (5.19). Il a fallu considérer environ 500 coefficients avec cette méthode.

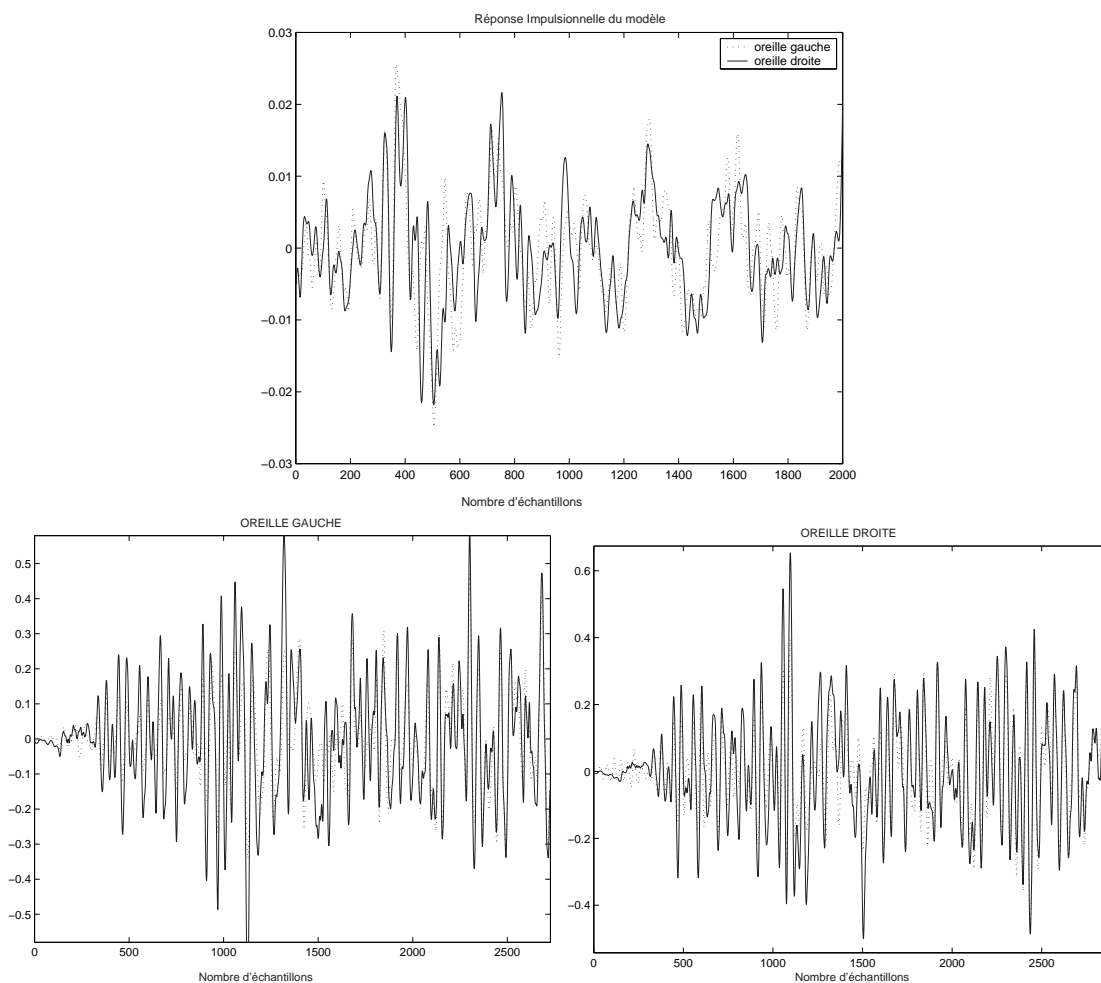


FIG. 5.18 – Estimation d'un filtre FIR avec la méthode LMS. La figure du haut représente la réponse impulsionnelle caractéristique de la propagation des vibrations issues du chevalet jusqu'aux oreilles du pianiste. Les deux figures du bas représentent les signaux de pression acoustique mesurés (en trait plein) et de synthèse (en traits pointillés) au niveau des deux oreilles.

Conclusion Les résultats obtenus par ces méthodes se sont avérés peu convaincants, étant donné que les fonctions de transfert à estimer doivent satisfaire deux conditions : préserver l'attaque (la partie transitoire du son) qui nécessite de considérer une réponse impulsionnelle brève, et modifier pertinemment l'amplitude et la phase de chaque partiel du signal. Ces deux conditions deviennent incompatibles dans le cas des méthodes citées précédemment car la détermination précise de l'amplitude et de la phase peuvent se faire au détriment de la longueur de la réponse impulsionnelle.

En effet, le nombre de coefficients nécessaire pour obtenir un son satisfaisant varie d'une note à l'autre. De plus, il n'existe pas de méthodes d'estimation des coefficients unique pour l'ensemble des notes. Une méthode donnée peut donner de très bons résultats pour une note grave et en même temps être inefficace pour une note aigüe.

Cette difficulté nous a conduit à reconsidérer le problème de la déconvolution. Étant donné que la table d'harmonie est excitée par les cordes, il est suffisant de reproduire l'effet perceptif sur les modes de résonance.

Nous avons vu que les fonctions de transfert étaient définies en (5.35), comme le rapport des spectres des signaux acoustiques au niveau des deux oreilles et du signal vibratoire au niveau du

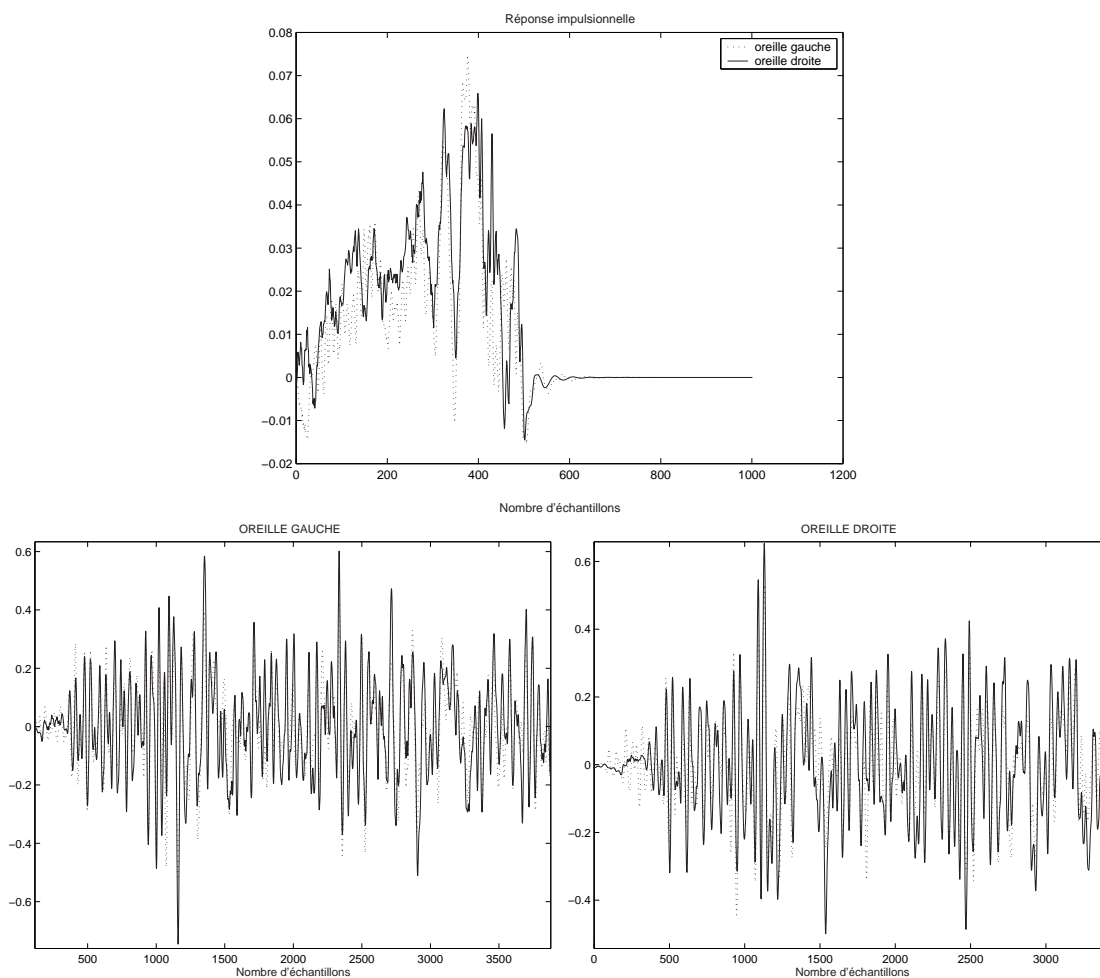


FIG. 5.19 – Estimation d'un filtre IIR. La figure du haut représente la fonction caractéristique de la propagation des vibrations issues du chevalet jusqu'aux oreilles du pianiste. Les deux figures du bas représentent les signaux de pression acoustique mesurés (en trait plein) et de synthèse (en traits pointillés) au niveau des deux oreilles.

chevalet. Chaque signal expérimental est alors considéré comme le signal de sortie du modèle de cordes couplées présenté dans le paragraphe 5.5.1. Les fonctions de transfert que l'on cherche à estimer sont alors définies comme le rapport des spectres des signaux de sortie respectifs qui ne sont déterminés qu'aux fréquences de résonance des cordes. Etant donné que ce modèle a un comportement linéaire, on peut donc établir une relation d'équivalence entre le rapport des signaux de sortie et celui des signaux d'entrée du modèle. De cette manière, l'estimation des fonctions de transfert s'effectue sur les signaux d'excitation supposés être plus réguliers dans la mesure où ils correspondent à la force appliquée par le marteau sur les cordes.

Le problème de déconvolution est à présent réduit au calcul du rapport des spectres d'excitation du modèle de synthèse par guide d'onde couplés, correspondants aux signaux acoustiques au niveau des deux oreilles et au signal vibratoire au niveau du chevalet. De plus, il nous permet de faire abstraction de composantes parasites (audibles dans les signaux de pression acoustique au niveau des oreilles) qui correspondent aux bruits de la mécanique du marteau et qui posent des problèmes lorsque l'on utilise des méthodes classiques de déconvolution.

5.5.5 Estimation des fonctions de transfert

L'ensemble des trois signaux (accéléromètre, pression acoustique au niveau des deux oreilles du pianiste) est ainsi modélisé par le modèle guide d'onde couplé représenté sur la figure (5.11). Pour chaque note considérée, les fonctions de transfert sont définies comme le rapport des spectres des signaux d'entrée du modèle guide d'onde correspondant :

$$\begin{cases} T_d(\omega_k) = \frac{E_d(\omega_k)}{E_v(\omega_k)} \\ T_g(\omega_k) = \frac{E_g(\omega_k)}{E_v(\omega_k)} \end{cases} \quad (5.49)$$

où $E_v(\omega_k)$, $E_d(\omega_k)$, $E_g(\omega_k)$ sont les signaux d'entrée des modèles guide d'onde correspondants respectivement au signal vibratoire des cordes, au signal de pression acoustique de l'oreille droite et celui de l'oreille gauche.

Comme nous l'avons vu précédemment, les paramètres du modèle peuvent donc être définis à partir de l'analyse de signaux expérimentaux. Le signal d'excitation du modèle sur lequel l'estimation des fonctions de transfert sera effectuée est défini de la manière suivante.

D'après (5.17) et (5.18), l'excitation du modèle guide d'onde est définie en posant :

$$S(\omega) = E(\omega)T(\omega) \quad (5.50)$$

ce qui permet d'écrire aux fréquences de résonance :

$$\begin{cases} \frac{a_k}{\alpha_k + i(\omega - \omega_{1k})} \approx \frac{E(\omega)P(\omega)e^{-i\omega d}}{1 - |X(\omega)| e^{-i(\omega d - \phi_X(\omega))}} \\ \frac{b_k}{\beta_k + i(\omega - \omega_{2k})} \approx \frac{E(\omega)Q(\omega)e^{-i\omega d}}{1 - |Y(\omega)| e^{-i(\omega d - \phi_Y(\omega))}} \end{cases} \quad (5.51)$$

L'excitation est donc définie en effectuant la même méthode d'identification, ce qui donne les relations suivantes :

$$\begin{cases} E(\omega_{1k}) = \frac{\tilde{a}_k D X(\omega_{1k})}{P(\omega_{1k})} \\ E(\omega_{2k}) = \frac{\tilde{b}_k D Y(\omega_{2k})}{Q(\omega_{2k})} \end{cases} \quad (5.52)$$

En supposant que $E(\omega_{1k}) \approx E(\omega_{2k})$, alors :

$$E(\omega_{1k})(P(\omega_{1k})Y(\omega_{2k}) + Q(\omega_{2k})X(\omega_{1k})) = D(\tilde{a}_k + \tilde{b}_k)X(\omega_{1k})Y(\omega_{2k}) \quad (5.53)$$

En utilisant ensuite les relations en (5.20) :

$$\begin{cases} X(\omega)Y(\omega) = F_1(\omega)F_2(\omega)(1 - C_1(\omega)C_2(\omega)) \\ P(\omega)Y(\omega) + Q(\omega)X(\omega) = F_1(\omega)F_2(\omega) \end{cases} \quad (5.54)$$

On peut en déduire le signal d'entrée du modèle $E(\omega)$ qui a donc pour expression :

$$E(\omega_{1k}) \approx E(\omega_{2k}) = \frac{D(\tilde{a}_k X(\omega_{1k}) + \tilde{b}_k Y(\omega_{2k}))^2}{\tilde{a}_k X(\omega_{1k})^2 + \tilde{b}_k Y(\omega_{2k})^2} \quad (5.55)$$

avec :

$$X(\omega_{1k}) = \frac{e^{\tilde{\omega}_{1k} D - 2k\pi}}{\tilde{\alpha}_k D + 1} \quad ; \quad Y(\omega_{2k}) = \frac{e^{\tilde{\omega}_{2k} D - 2k\pi}}{\tilde{\beta}_k D + 1} \quad (5.56)$$

Les spectres d'excitation sont obtenus à partir des paramètres $\{\tilde{a}_k, \tilde{b}_k, \tilde{\alpha}_k, \tilde{\beta}_k, \tilde{\omega}_{1k}, \tilde{\omega}_{2k}\}$ extraits de l'analyse. Les figures (5.20) représentent les modules et phases de T_d et T_g pour la note D4 et pour trois différentes vitesses MIDI du marteau.

Ces résultats montrent que l'hypothèse d'un comportement linéaire du modèle guide d'onde couplé peut être validée. On peut toutefois observer des différences en hautes fréquences mais ils peuvent correspondre aux erreurs d'estimation dues à une faible amplitude du signal d'excitation (en particulier pour la plus petite vitesse MIDI).

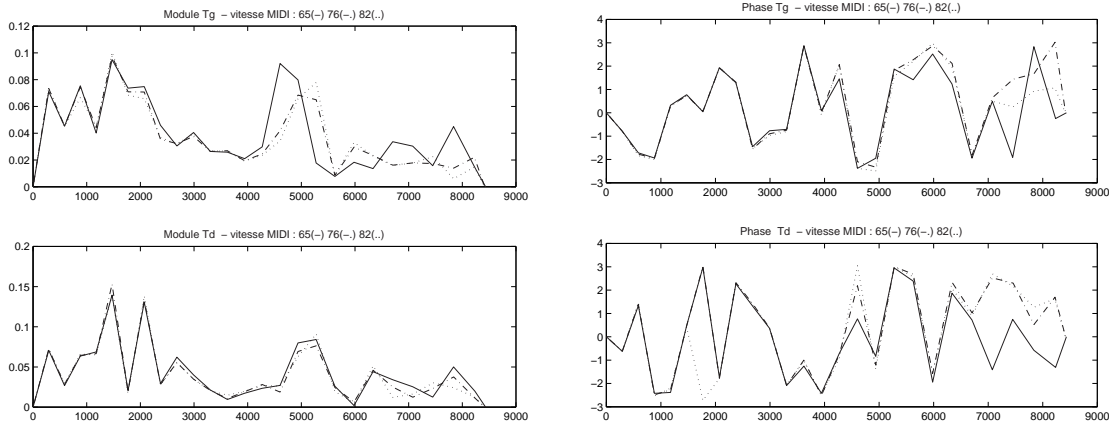


FIG. 5.20 – Modules et phases de T_d (bas) et T_g (haut) pour la note D4 pour trois vitesses MIDI différentes : 65(-), 76(-), 82(..) en fonction de la fréquence.

Nous pouvons également comparer les fonctions de transfert estimées pour des notes proches. Etant donné que ces fonctions sont uniquement définies sur les valeurs discrètes des fréquences propres différentes d'une note à l'autre mais proches entre elles, nous pouvons alors considérer une courbe globale qui interpole tous ces points discrets. Cette courbe est d'autant plus significative que l'excitation fournie par les cordes à la table d'harmonie n'est pas une force ponctuelle. Elle est répartie sur toute la longueur du chevalet. Une *globalisation* des courbes de fonctions de transfert pour des notes voisines est donc possible. Pour les cinq notes proches (B2, C3, C3d, D3, D3d), nous avons obtenu les résultats représentés sur la figure (5.21).

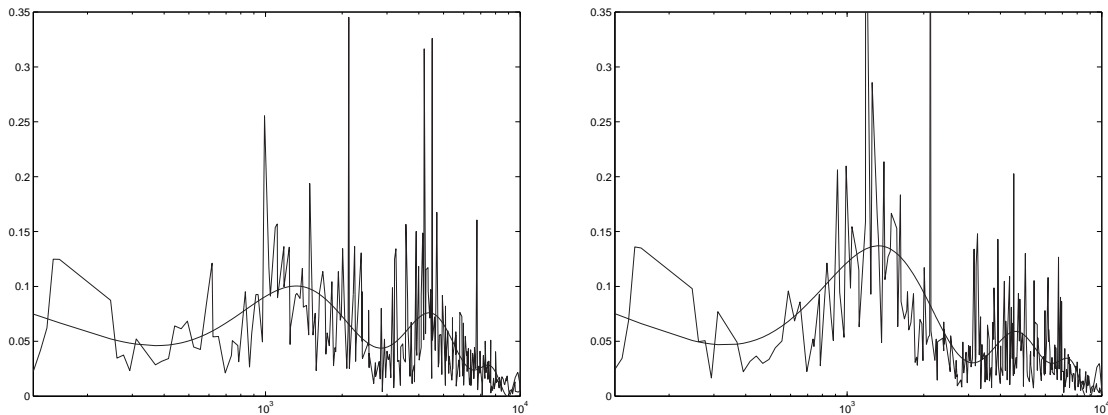


FIG. 5.21 – Module de la fonction de transfert globale estimée pour cinq notes proches (B2, C3, C3d, D3, D3d), pour l'oreille droite (figure de gauche) et l'oreille gauche (figure de droite). L'abscisse correspond à une échelle logarithmique en fréquences.

Sur chaque graphe, nous avons tracé une courbe continue pour faciliter la lecture. Cette courbe

a été obtenue en interpolant les fonctions de transfert avec un polynôme d'ordre huit. Les fonctions de transfert pour les deux oreilles sont similaires. En effet, les chemins parcourus par les ondes acoustiques sont proches pour les deux oreilles et les petites différences notées sont certainement dues aux phénomènes de diffraction par la tête artificielle. Nous pouvons reconnaître le comportement vibratoire de la table d'harmonie caractérisé par son impédance, qui a été décrit dans des articles de référence comme [35].

Cependant, il n'est pas encore envisageable de déterminer une fonction de transfert globale pour l'ensemble des notes du clavier. En effet, même s'il est pertinent de considérer une fonction globale pour des notes voisines, les valeurs obtenues sur l'ensemble des notes sont trop éloignées pour effectuer une interpolation cohérente.

5.5.6 Restitution sonore

Les fonctions de transfert estimées précédemment ont été validées en simulant à l'aide du modèle de synthèse les signaux mesurés expérimentalement. Afin de recréer artificiellement le champ acoustique rayonné par le piano au niveau de la tête d'un pianiste, les signaux de synthèse pour les deux oreilles ont tout d'abord été restitués par une technique binaurale puis transaurale en utilisant deux haut-parleurs.

La technique binaurale consiste simplement à restituer sur casque le champ acoustique que l'on veut reproduire. En pratique, il suffit d'envoyer directement les signaux synthétisés dans les deux canaux du casque (oreille gauche et oreille droite).

La technique transaurale avec deux haut-parleurs ajoute une étape supplémentaire [32].

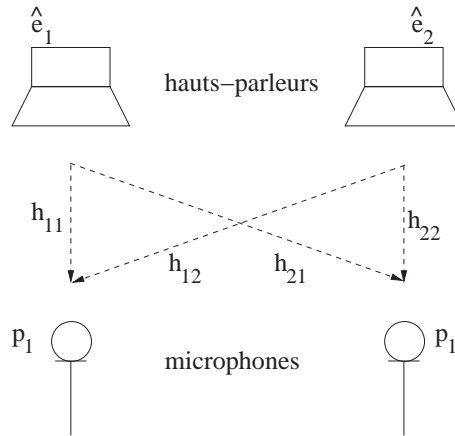


FIG. 5.22 – Technique de restitution transaurale. A l'aide de deux hauts-parleurs, le champ acoustique est reproduit au niveau des microphones.

La technique consiste à reproduire les signaux de pression $p_1(t)$ et $p_2(t)$ à partir de signaux binauraux notés $e_1(t)$ et $e_2(t)$. Ces derniers ne peuvent pas être directement restitués avec les hauts-parleurs. En effet, par rapport à la restitution binaurale, il est nécessaire d'annuler la contribution croisée du haut-parleur gauche (resp. droite) au niveau du microphone droit (resp. gauche) comme l'illustre la figure (5.22). Pour cela, il est nécessaire de déterminer les signaux adéquats notés $\hat{e}_1(t)$ et $\hat{e}_2(t)$ qu'il faut envoyer aux hauts-parleurs à partir des signaux binauraux $e_1(t)$ et $e_2(t)$. La méthode est la suivante. On peut écrire le système sous forme matricielle :

$$\mathbf{P} = \mathbf{H}\hat{\mathbf{E}} \quad (5.57)$$

avec :

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} ; \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} ; \quad \hat{\mathbf{E}} = \begin{pmatrix} \hat{e}_1 \\ \hat{e}_2 \end{pmatrix} \quad (5.58)$$

Afin de compenser la propagation des ondes, il faut déterminer la matrice inverse de \mathbf{H} telle que :

$$\hat{\mathbf{E}} = \mathbf{H}^{-1}\mathbf{E} \quad \text{avec} \quad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} \quad (5.59)$$

et que l'on retrouve :

$$\mathbf{P} = \mathbf{H}\mathbf{H}^{-1}\mathbf{E} = \mathbf{E} \quad (5.60)$$

La matrice inverse s'écrit donc :

$$\mathbf{H}^{-1} = \frac{1}{h_{11}h_{12} - h_{21}h_{22}} \begin{pmatrix} h_{22} & -h_{12} \\ -h_{21} & h_{11} \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} h_{22} & -h_{12} \\ -h_{21} & h_{11} \end{pmatrix} \quad (5.61)$$

Les signaux $\hat{e}_1(t)$ et $\hat{e}_2(t)$ qu'il faut envoyer aux hauts-parleurs sont donc déterminés à partir des signaux binauraux $e_1(t)$ et $e_2(t)$, comme le montre la figure (5.23).

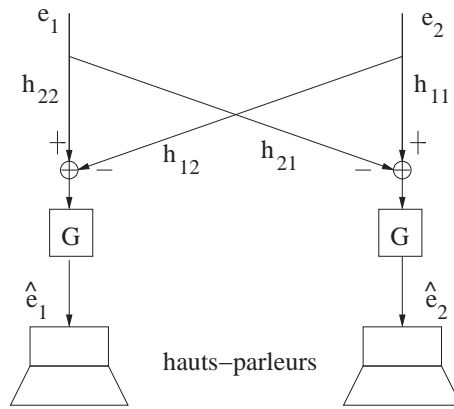


FIG. 5.23 – Estimation de signaux à restituer aux deux hauts-parleurs à partir de signaux binauraux dans le cas d'une restitution transaurale.

Si la distance entre les hauts-parleurs, la distance haut-parleur/microphone et la distance entre les microphones sont connues, les coefficients de la matrice H peuvent être calculés car ils sont considérés comme des retards purs. Par contre, si l'on suppose à la place des deux microphones, les oreilles d'un auditeur, il faudra prendre en compte le HRTF de la tête (de l'anglais **H**ead **R**elated **T**ransfer **F**unction).

Les restitutions effectuées ont permis de valider les fonctions de transfert estimées à partir des mesures expérimentales. En particulier, la différence de niveau sonore entre les deux oreilles révèle la directivité du son de piano. La localisation de la source sonore correspondant à une note grave est généralement définie à gauche.

La technique transaurale n'est pas encore généralisable à plusieurs auditeurs, ce qui limite pour l'instant son application. Par contre, il existe maintenant des techniques plus perfectionnées utilisant des méthodes multi-canaux qui permettraient de renforcer l'impression d'enveloppement de l'auditeur dans un environnement sonore plus réaliste.

Conclusions sur ce chapitre

Dans ce chapitre, la table d'harmonie d'un piano a été abordé. Après une description physique de cet élément important de l'instrument, les principales contributions de la table d'harmonie dans la production du son ont été présentées. Notamment, il est important de retenir que la table a deux fonctions importantes d'un point de vue perceptif : elle constitue un élément de couplage entre les cordes ce qui permet la résonance sympathique caractéristique du son de piano, et elle permet de rayonner l'énergie vibratoire des cordes dans le milieu environnant. Dans un premier temps, le modèle de synthèse présenté dans le chapitre 4 a été utilisé pour reproduire la réponse impulsionnelle de la table d'harmonie, dans le même concept que la méthode du *Commuted Piano Synthesis*. Par contre, l'estimation des paramètres du modèle présenté dans ce document ont été estimés de l'analyse de signaux expérimentaux.

Dans un second temps, une autre approche a été abordée dans la mesure où la table d'harmonie (qui est une structure multidimensionnelle complexe) n'est pas sollicitée par un signal d'impact mais par un signal particulier qui est la vibration des cordes au niveau du chevalet. Ainsi, au lieu de simuler sa réponse impulsionnelle, il suffit d'estimer cette réponse uniquement aux modes de vibration des cordes. L'idée a consisté à prendre en compte la table d'harmonie dans un modèle de cordes déjà existant. Dans le cadre d'analyse-synthèse, une campagne de mesures a été effectuée sur un piano à queue Yamaha Disklavier placé en chambre anéchoïque (de manière à pouvoir mesurer le champ rayonné direct). Le rôle de la table d'harmonie a pu être pris en compte dans le modèle de cordes, par la détermination de filtres de couplage (caractéristiques de son rôle d'élément de couplage entre les cordes) et l'ajout de filtres permettant de recréer le champ rayonné au niveau de la tête d'un pianiste. Les paramètres de ces filtres ont été estimés de l'analyse des signaux obtenus expérimentaux. Ces filtres simulent la propagation des ondes des chevalets aux oreilles d'un instrumentiste virtuel. Les sons de synthèse obtenus sont ensuite restitués par des techniques binaurales ou transaurales. Ce modèle reproduit les phénomènes de battements (dus au couplage) et la directivité du son (liée aux modes de rayonnement de la table d'harmonie) qui améliore la sensation d'enveloppement.

Conclusion générale et Perspectives

Conclusion générale

Le travail présenté dans ce document a porté sur l'élaboration de méthodes de synthèse de sons impulsifs en associant plusieurs approches, notamment la mécanique vibratoire, le traitement des signaux non stationnaires et la psychoacoustique. Lorsque cela a été possible, ces méthodes ont été basées sur la modélisation physique de la structure qui a été excitée. En même temps, des critères perceptifs ont été pris en compte dans le but d'obtenir des sons de synthèse qui soient au final, jugés satisfaisants par notre oreille.

Dans le chapitre 1, les principales caractéristiques physiques d'un son impulsif qui sont importantes pour sa perception ont été définies sur la base de résultats de tests psychoacoustiques. Parmi ces grandeurs perceptivement importantes, on peut retenir la loi d'amortissement reliée au coefficient de friction interne (caractéristique de la nature du matériau) et les résonances contenues dans le spectre (caractéristique de la forme géométrique de la structure). Dans le cadre de l'analyse-synthèse, ces caractéristiques physiques ont été estimées de l'analyse du signal. L'aspect transitoire du signal a nécessité d'utiliser une représentation conjointe dépendant du temps et de la fréquence. La prise en compte de critères perceptifs a guidé mon choix sur des représentations du type temps-échelle et en échelle de Bark. À partir de ces représentations, différentes méthodes d'analyse du signal permettant d'extraire les lois d'amortissement et les paramètres modaux (fréquences de résonance et amplitudes) ont été présentées, ce qui a ensuite permis d'estimer des lois d'amortissement moyen expérimentales pour les matériaux bois, verre et fer.

Dans le chapitre 2, un modèle de synthèse pour la simulation de vibrations de structures physiques unidimensionnels de type poutre a été présenté. Le modèle est basé sur le concept des modèles guides d'onde numériques décrits par J. O. Smith pour simuler notamment les vibrations d'une corde tendue. Par la suite, plusieurs extensions du modèle ont été présentées, notamment la prise en compte d'hétérogénéités dans la structure. En plus des applications dans le domaine de la synthèse sonore musicale, ce modèle a été utilisé dans le cadre d'une étude sur la caractérisation de poutres usinées comportant un défaut par l'analyse de signaux acoustiques et vibratoires.

Dans le chapitre 3, le modèle guide d'onde présenté dans le chapitre 2 a été généralisé aux cas de structures multidimensionnelles. J'ai tout d'abord présenté les principales méthodes de synthèse existantes pour simuler les vibrations de structures bidimensionnelles. J'ai ensuite proposé deux méthodes de synthèse basées sur le concept de guides d'ondes numériques permettant de simuler les vibrations de structures simples (du type membrane ou plaque mince) où les solutions analytiques de l'équation du mouvement correspondant à la structure sont connues. Dans ce cas, les paramètres des modèles de synthèse sont définis à partir des grandeurs physiques caractérisant la structure. Dans le cadre du problème inverse, si la structure est proche d'une structure simple correspondant au modèle, alors il est possible d'utiliser des techniques d'optimisation qui permettent de déterminer un ensemble de paramètres adéquats pour reproduire un son de synthèse le plus similaire possible d'un point de vue perceptif.

Le modèle de synthèse proposé dans le chapitre 4 constitue une généralisation des différentes méthodes de synthèse présentées dans les chapitres précédents dans la mesure où il permet de reproduire un son impulsif produit par n'importe quelle structure même dans le cas où les solutions

analytiques ou numériques ne sont pas connues. Le modèle proposé est un modèle de signal visant à simuler l'effet perceptif sans prendre en compte la modélisation du système physique qui a produit le son. La seule source d'information qui est exploitée est le signal lui-même. Dans tous les cas, les paramètres nécessaires à la synthèse sont déterminés par les méthodes d'analyse définies dans le chapitre 1. En particulier, les coefficients du filtre évolutif responsable de l'amortissement du son sont reliés à la loi d'amortissement caractéristique de la nature du matériau.

Enfin, dans le chapitre 5, un exemple de structure complexe multidimensionnelle, la table d'harmonie d'un piano a été traité. La table possède deux fonctions importantes d'un point de vue perceptif dans la production du son de piano : elle constitue un élément de couplage entre les cordes ce qui permet la résonance sympathique caractéristique du son de piano, et elle permet de rayonner l'énergie vibratoire des cordes dans le milieu environnant. Dans un premier temps, en se basant sur le concept de la méthode du *Commuted Piano Synthesis*, le modèle de synthèse présenté dans le chapitre 4 a été utilisé pour reproduire la réponse impulsionnelle de la table d'harmonie. L'estimation des paramètres du modèle a été effectuée à partir de l'analyse de signaux expérimentaux obtenus par des mesures effectuées sur un piano à queue Yamaha Disklavier. La détermination de cette réponse impulsionnelle n'est toutefois pas suffisante pour simuler le résultat perceptif du champ rayonné par la table d'harmonie. Pour effectuer ces mesures, le piano à queue Yamaha Disklavier a été placé en chambre anéchoïque de manière à pouvoir mesurer le champ direct rayonné. Partant du principe que la table d'harmonie est soumise à une excitation produite par la vibration des cordes et non par un impact, l'idée a consisté à prendre en compte ses contributions dans un modèle de cordes. Ainsi, les filtres de couplage (caractéristiques de son rôle d'élément de couplage entre les cordes) et les filtres permettant de recréer le champ rayonné au niveau de la tête d'un pianiste ont été estimés de l'analyse des signaux expérimentaux. Les sons obtenus par le modèle de synthèse ont ensuite été restitués par des techniques binaurales et transaurales. Les phénomènes de battements (dus au couplage) et la directivité du son (liée aux modes de rayonnement de la table d'harmonie) sont reproduits de manière satisfaisante, améliorant ainsi la sensation d'enveloppement.

Perspectives

Dans les perspectives proches, l'implémentation en temps-réel des modèles de synthèse basés sur les guides d'onde présentés dans les chapitres 2 et 3 reste encore à faire. Par contre, le modèle de synthèse du chapitre 4 avec la méthode basée sur la synthèse additive, a pu être implémenté en temps-réel [9]. Les premiers résultats de synthèse sont encourageants et l'implémentation attend d'être améliorée et optimisée. Notamment, les courbes d'évolution temporelle des coefficients du filtre responsable de l'amortissement peuvent être dans la plupart des cas, paramétrées. Ainsi, en utilisant une technique de *morphing*, il serait possible de créer un *espace de timbre* dans lequel on pourrait évoluer continuellement d'un son boisé à un son métallique par exemple. Ce modèle constitue également un outil propice pour créer de nouveaux sons.

Dans le chapitre 5, les expériences menées sur le piano à queue ont permis de constituer une grande base de données expérimentales qui comprend des mesures simultanées de vibrations de cordes au niveau du chevalet et de pression acoustique au niveau des oreilles d'un pianiste, pour toutes les notes du clavier. Deux fonctions de transfert (une pour chaque oreille) par note ont pu être déterminées. Ces fonctions étant définies uniquement aux fréquences de résonance de la note concernée, une fonction caractéristique a pu être définie pour un ensemble de notes voisines (cinq notes dans l'exemple donné dans le chapitre 5) par interpolation des fonctions correspondant à chacune des notes. Cette opération d'interpolation a été limitée à quelques notes voisines car les évolutions sont très différentes suivant les notes. L'idéal aurait été de déterminer une fonction de transfert globale pour chaque oreille, qui serait valable pour toutes les notes du clavier. Une approche possible serait de paramétrer les fonctions obtenues pour chaque note et de déduire une fonction globale dont l'allure évoluerait d'une note à l'autre.

Annexes

- **Annexe A** : Solutions analytiques pour la membrane et la plaque mince.
- **Annexe B** : Matériel utilisé.
- **Annexe C** : Analyse-synthèse par modèle guide d'onde des vibrations de deux cordes de piano couplées.
- **Annexe D** : Caractérisation des produits collés à base de bois par l'analyse des vibrations dans le domaine acoustique.
- **Annexe E** : Synthèse de vibrations de structures bidimensionnelles à l'aide de modèle guide d'onde adapté par méthode d'optimisation.

Annexe A

Solutions analytiques pour la membrane et la plaque mince

A.1 Modèle mécanique de la membrane

Je me propose de présenter le modèle mécanique de la membrane rectangulaire puis circulaire. Dans chacun des cas, je considérerai les conditions aux limites où les solutions analytiques sont connues. En particulier, je déterminerai les fonctions propres et les pulsations propres de l'équation du mouvement du cas considéré.

A.1.1 Membrane rectangulaire

Le déplacement transversal $u(x,y,t)$ d'une membrane rectangulaire de longueur L_x et de largeur L_y , au point (x,y) à l'instant t est régi par l'équation suivante :

$$T \left(\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial y^2} \right) = \rho_s \frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial t^2} \quad (\text{A.1})$$

où T représente la tension uniforme (suivant les axes x et y) appliquée à la membrane et ρ_s la masse surfacique.

En supposant que la membrane est encastree à ses bords (les solutions de l'équation du mouvement peuvent être calculées analytiquement dans ce cas), les conditions aux limites s'écrivent :

$$u(0,y,t) = 0; \quad u(L_x,y,t) = 0; \quad u(x,0,t) = 0; \quad u(x,L_y,t) = 0 \quad (\text{A.2})$$

On cherche la solution de cette équation sous la forme :

$$u(x,y,t) = \sum_m \sum_n U_{mn}(x,y) e^{i\omega_{mn}t} \quad (\text{A.3})$$

avec

$$U_{mn}(x,y) = (\sin \beta_m x + \cos \beta_m x)(\sin \beta_n y + \cos \beta_n y)$$

Avec les conditions aux limites d'encastrement, on peut donc en déduire :

$$\beta_m = \frac{m\pi}{L_x} \quad \text{et} \quad \beta_n = \frac{n\pi}{L_y} \quad (\text{A.4})$$

On en déduit par ailleurs les fréquences propres de la membrane en remplaçant l'expression de $u(x,y,t)$ dans l'équation du mouvement :

$$\omega_{mn} = \sqrt{\frac{T}{\rho_s}} \sqrt{\left(\frac{m\pi}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{L_y}\right)^2} \quad (\text{A.5})$$

Les premiers modes propres de la membrane sont représentés sur la figure (A.1).

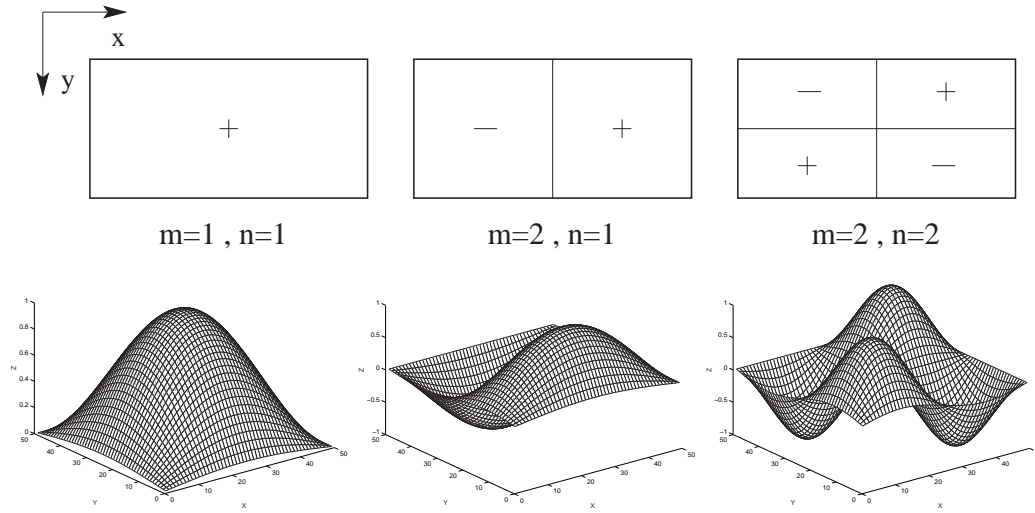


FIG. A.1 – Modes propres d'une membrane rectangulaire pour $\{m = 1, n = 1\}$ (figure de gauche), pour $\{m = 2, n = 1\}$ (figure du milieu), et pour $\{m = 2, n = 2\}$ (figure de droite). Pour les figures du haut, les ventres de vibration sont désignés par un $+$ et un $-$.

A.1.2 Membrane circulaire

Dans le cas d'une membrane circulaire, l'équation du mouvement en coordonnées polaires s'écrit :

$$T \nabla^2 w(r, \theta, t) = \rho_s \frac{\partial^2 w(r, \theta, t)}{\partial t^2} \quad (\text{A.6})$$

avec $w(r, \theta, t)$ le déplacement transversal de la membrane au point (r, θ) à l'instant t , T la tension appliquée à la membrane, ρ_s la masse surfacique et ∇^2 l'opérateur qui est le Laplacien en coordonnées polaires, défini par :

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad (\text{A.7})$$

On cherche la solution de la forme :

$$w(r, \theta, t) = R(r) \Theta(\theta) (A \cos \omega t + B \sin \omega t) \quad (\text{A.8})$$

En remplaçant cette solution dans l'équation du mouvement, on obtient :

$$r^2 \frac{R''}{R} + r \frac{R'}{R} + r^2 \frac{\omega^2}{c_0^2} + \frac{\Theta''}{\Theta} = 0 \quad \text{avec} \quad c_0 = \sqrt{\frac{T}{\rho_s}} \quad (\text{A.9})$$

On pose $\beta^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2}$. On peut alors résoudre les deux équations séparément :

$$\begin{cases} -\frac{\Theta''}{\Theta} = \gamma^2 \\ \frac{R''}{R} + \frac{1}{r} \frac{R'}{R} + (\beta^2 - \frac{\gamma^2}{r^2}) R = 0 \end{cases} \quad (\text{A.10})$$

On pose γ comme étant une constante par rapport aux deux variables r et θ . La solution de la première équation s'écrit ainsi :

$$\Theta(\theta) = A e^{i\gamma\theta} \quad (\text{A.11})$$

Le fait que la membrane ait une dimension finie impose que γ soit un entier naturel (ce sont les conditions de périodicité) que l'on va noter n à partir de maintenant.

Pour la fonction $R(r)$, il faut résoudre une équation de Bessel d'ordre n dont la solution est donnée par $R(r) = B_1 J_n(\beta r) + B_2 Y_n(\beta r)$, où J_n et Y_n sont respectivement les fonctions de Bessel de première et de deuxième espèce. On écrit que $B_2 = 0$ (justification) et la solution s'écrit donc :

$$w(r, \theta, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} W_{mn} (A_{mn} \cos(\omega_{mn} t) + B_{mn} \sin(\omega_{mn} t)) + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{W}_{mn} (\tilde{A}_{mn} \cos(\omega_{mn} t) + \tilde{B}_{mn} \sin(\omega_{mn} t)) \right\} \quad (\text{A.12})$$

où les modes normaux sont donnés par :

$$\begin{cases} W_{mn} = J_n(\beta_{mn} r) \cos(n\theta) \\ \tilde{W}_{mn} = J_n(\beta_{mn} r) \sin(n\theta) \end{cases} \quad (\text{A.13})$$

Les valeurs de β_{mn} sont données numériquement par des tables qui représentent les zéros de J_n en fonction des conditions aux limites. On peut alors en déduire les expressions des pulsations propres :

$$\omega_{mn} = \beta_{mn} c_0 = \beta_{mn} \sqrt{\frac{T}{\rho_s}} \quad \text{avec } n \in \mathbb{N} \quad \text{et } m \in \mathbb{N}^* \quad (\text{A.14})$$

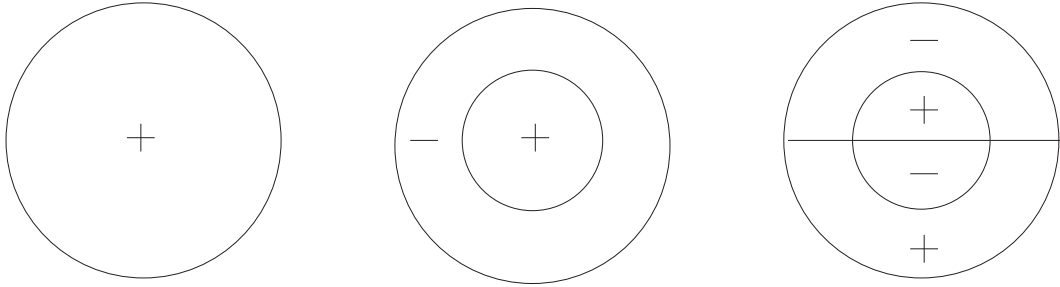


FIG. A.2 – Modes propres d'une membrane circulaire encastrée pour $\{m = 1, n = 1\}$ (figure de gauche), pour $\{m = 2, n = 1\}$ (figure du milieu), et pour $\{m = 2, n = 2\}$ (figure de droite). Les ventres de vibration sont désignés par un + et un -. Les traits pleins correspondent aux nœuds de vibration (l'amplitude de vibration est nulle).

Les premiers modes propres de la membrane circulaire encastrée sont représentés schématiquement sur la figure (A.2). Les ventres de vibration sont désignés par un + et un -. Les traits pleins correspondent aux nœuds de vibration (l'amplitude de vibration est nulle).

Dans le cas de la membrane circulaire appuyée, les valeurs des pulsations propres peuvent être approximées par :

$$\omega_{mn} = \sqrt{\frac{T}{\rho_s}} \frac{\pi}{a} \left(n + \frac{m}{2} - \frac{1}{4} \right) \quad \text{avec } n \in \mathbb{N} \quad \text{et } m \in \mathbb{N}^* \quad (\text{A.15})$$

A.2 Modèle mécanique de la plaque mince

Un modèle mécanique de la plaque mince rectangulaire et circulaire est présenté dans ce paragraphe. On considèrera les conditions aux limites qui donnent des solutions analytiques. Une plaque est supposée mince lorsque l'épaisseur est petite devant ses deux autres longueurs caractéristiques, largeur et longueur.

A.2.1 Plaque mince rectangulaire isotrope

Dans le cas d'une plaque mince rectangulaire isotrope, l'équation du mouvement qui régit le déplacement transversal $z(x,y,t)$ au point (x,y) et à l'instant t s'écrit :

$$D\nabla^4 z(x,y,t) + \rho h \frac{\partial^2}{\partial t^2} z(x,y,t) = 0 \quad (\text{A.16})$$

Le paramètre $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ est la constante de rigidité, E le module d'élasticité dynamique, ν le coefficient de Poisson, ρ la masse volumique et h l'épaisseur de la plaque.

Dans le cas de la plaque mince en appui simple, les fonctions propres s'expriment sous la forme suivante si l'on reprend l'expression (A.3) comme la solution de l'équation du mouvement :

$$U_{mn} = \sin\left(\frac{m\pi}{L_x}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L_y}y\right) \quad (\text{A.17})$$

Les grandeurs L_x et L_y correspondent aux dimensions géométriques de la plaque (longueur et largeur). Les indices m et n correspondent au nombre de ventres dans chaque direction propre. L'expression des pulsations propres est obtenue en remplaçant celle de la solution analytique dans l'équation du mouvement :

$$\omega_{mn} = \pi^2 \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \left(\frac{m^2}{L_x^2} + \frac{n^2}{L_y^2} \right) \quad (\text{A.18})$$

A.2.2 Plaque mince rectangulaire anisotrope

Dans le cas d'une plaque mince anisotrope, l'équation du mouvement s'écrit :

$$\left(D_x \frac{\partial^4}{\partial x^4} + D_y \frac{\partial^4}{\partial y^4} + (D_x \nu_x + D_y \nu_y + 4D_{xy}) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} \right) z(x,y,t) + \rho h \frac{\partial^2}{\partial t^2} z(x,y,t) = 0 \quad (\text{A.19})$$

Les grandeurs D_x , D_y et D_{xy} sont les facteurs de rigidité suivant les axes principaux (axes x et y) et dans la direction transverse aux deux axes et s'expriment de la manière suivante :

$$D_x = \frac{h^3 E_x}{12(1-\nu_x \nu_y)} ; \quad D_y = \frac{h^3 E_y}{12(1-\nu_x \nu_y)} ; \quad D_{xy} = \frac{h^3 G_{xy}}{12} \quad (\text{A.20})$$

avec h l'épaisseur, ν_x et ν_y les coefficients de Poisson dans les deux directions et G_{xy} le module de cisaillement. A cause du terme de couplage (terme croisé en $\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2}$), cette équation n'est

pas soluble analytiquement. Les ondes longitudinales ont une vitesse égale à $c_L = \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}}$. Les ondes transversales se propagent à la même vitesse que les ondes de torsion, c'est-à-dire à la vitesse $c_T = \sqrt{\frac{G_{xy}}{\rho}}$.

On peut trouver dans la littérature, une expression approchée des fréquences propres d'une plaque rectangulaire en bois (matériau anisotrope et plus particulièrement orthotrope) de dimensions $L_x \times L_y$ qui s'écrit [29] :

$$f_{mn} = 0.453h \left[c_x \left(\frac{m+1}{L_x} \right)^2 + c_y \left(\frac{n+1}{L_y} \right)^2 + \frac{2(m+1)(n+1)}{L_x L_y} \sqrt{c_x c_y} \right] \quad (\text{A.21})$$

avec les vitesses de propagation dans chacune des directions :

$$c_x = \sqrt{\frac{E_x}{\rho(1-\nu_x \nu_y)}} ; \quad c_y = \sqrt{\frac{E_y}{\rho(1-\nu_x \nu_y)}} \quad (\text{A.22})$$

A.2.3 Plaque mince circulaire isotrope

Dans le cas d'une plaque mince circulaire, l'équation du mouvement est donnée par :

$$D \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right)^2 z(r, \theta, t) + \rho h \frac{\partial^2}{\partial t^2} z(r, \theta, t) = 0 \quad (\text{A.23})$$

Les solutions de cette équation peuvent être déterminées comme dans le cas de la membrane circulaire et s'écrivent sous la forme d'une combinaison linéaire de fonctions de Bessel. Les valeurs des zéros de ces fonctions peuvent être calculées numériquement.

Les tableaux ci-dessous forment un récapitulatif des principaux résultats présentés dans cette annexe. Les notations utilisées sont :

T : tension	ρ_s : masse surfacique
L_x : longueur de la structure	L_y : largeur de la structure
h : épaisseur de la structure	a : rayon de la structure
ρ : masse volumique	ν : coefficient de Poisson
E : module d'Young	$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$: constante de rigidité
β_{mn} : m ième zéro de $J_n(\beta)$	

Les conditions aux limites s'écrivent :

$$\text{Bords appuyés : } \begin{cases} u = 0 \\ \Delta u - (1 - \nu) \partial_l^2 u = 0 \end{cases} \quad \text{Bords encastrés : } \begin{cases} u = 0 \\ \partial_n u = 0 \end{cases}$$

$$\text{Bords libres : } \begin{cases} -D(\Delta u - (1 - \nu) \partial_l^2 u) = 0 \\ -D(\partial_n \Delta u + (1 - \nu) \partial_l (\partial_n \partial_l u)) = 0 \end{cases}$$

	Membrane rectangulaire	Membrane circulaire
Equation	$T \Delta u(x, y, t) = \rho_s \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, y, t)$ avec $\Delta = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$	$T \Delta u(r, \theta, t) = \rho_s \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(r, \theta, t)$ avec $\Delta = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right)$
Bords appuyés	$\omega_{mn} = \sqrt{\frac{T}{\rho_s}} \sqrt{\left(\frac{m\pi}{L_x} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{L_y} \right)^2}$	$\omega_{mn} \approx \sqrt{\frac{T}{\rho_s}} \frac{\pi}{a} \left(n + \frac{m}{2} - \frac{1}{4} \right)$
Bords encastrés	$\omega_{mn} = \sqrt{\frac{T}{\rho_s}} \sqrt{\left(\frac{m\pi}{L_x} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{L_y} \right)^2}$	$\omega_{mn} = \sqrt{\frac{T}{\rho_s}} \frac{\pi \beta_{mn}}{a}$

	Plaque mince rectangulaire	Plaque mince circulaire
Equation	$D \Delta^2 u(x, y, t) + \rho h \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, y, t) = 0$ avec $\Delta = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$	$D \Delta^2 u(r, \theta, t) + \rho h \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(r, \theta, t) = 0$ avec $\Delta = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right)$
Bords appuyés	$\omega_{mn} = \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \left\{ \left(\frac{m\pi}{L_x} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{L_y} \right)^2 \right\}$	$\omega_{mn} = P_{mn} c_0$ $\omega_{mn} \approx \frac{\pi^2}{R^2} h \sqrt{\frac{E}{3\rho(1-\nu^2)}} \left(n + \frac{m}{2} \right)^2$
Bords libres	Solutions analytiques non connues	$\omega_{mn} = Q_{mn} c_0$ avec $Q_{mn} R \xrightarrow{m \rightarrow \infty} (2m + n) \frac{\pi}{2}$
Bords encastrés	Solutions analytiques non connues	$\omega_{mn} = S_{mn} c_0$ $S_{m0} R \xrightarrow{m \rightarrow \infty} (m + 1) \pi$ $f_{mn} \underset{n \rightarrow \infty}{\approx} \frac{\pi h}{2a^2} \sqrt{\frac{E}{3\rho(1-\nu^2)}} \left(n + \frac{m}{2} \right)^2$

Annexe B

Matériel utilisé

B.1 Ressource informatique

- *Poste de travail principal* :
 1. Processeur : Pentium III 600 MHz
 2. Mémoire RAM : 256 Mo
 3. Carte graphique : ATI Rage 128
 4. Carte son : Creative Soundblaster
 5. Amplificateur : Pionner A-209R
 6. Enceintes : JAMO
- Logiciel *Matlab* Version 6.5 - The Mathworks, Inc. :
 1. Signal Processing Toolbox
 2. Optimization Toolbox
 3. System Identification Toolbox
- Logiciel *Max-MSP* Version 4

B.2 Matériel de mesures

Expérimentation sur les plaques minces et la membrane

- *Accéléromètre* : accéléromètre piézoélectrique ENDEVCO modèle 2222C
- *Marteau-force* : Brüel & Kjær Modèle 8202
- *Lecteur-enregistreur DAT* : TASCAM DA-302

Expérimentation sur le piano à queue

- *Piano* : Piano demi-queue Yamaha Disklavier à entrée/sortie MIDI
- *Poste de travail* : Power Macintosh G3 / 400
- *Console de mixage* : TASCAM
- *Carte d'acquisition* : MOTU 2048 (Mark of the Unicorn)
- *Accéléromètre* : accéléromètre piézoélectrique ENDEVCO

Annexe C

Analyse-synthèse par modèle guide d'onde des vibrations de deux cordes de piano couplées

M. Aramaki, J. Bensa, L. Daudet, R. Kronland-Martinet et Ph. Guillemain

Paru dans : Journal of New Music Research, Swets & Zeitlinger, pp. 213-226, Vol. 30 (3).

Références : [4] [3]

Sous le titre :

Resynthesis of coupled piano string vibrations based on physical modeling

Résumé

Cet article présente une méthode permettant la resynthèse de sons générés par les vibrations de deux cordes de piano légèrement désaccordées et couplées au niveau du chevalet. Le système mécanique correspondant produit des doubles résonances qui génèrent des battements audibles dans le son produit et des doubles décroissances sur l'amplitude des partiels. Pour cela, nous avons mis en œuvre un modèle guide d'onde constitué de deux guides d'onde élémentaires couplés. Ce modèle permet de reproduire des sons réalistes d'un point de vue perceptif. Les paramètres de ce modèle sont estimés à partir de l'analyse de signaux réels obtenus expérimentalement par vibrométrie laser. Enfin, à partir des sons de synthèse, il est possible de simuler divers contextes physiques en modifiant de manière pertinente les paramètres du modèle.

Resynthesis of Coupled Piano String Vibrations Based on Physical Modeling

M. Aramaki, J. Bensa, L. Daudet, Ph. Guillemain and R. Kronland-Martinet

CNRS-Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique, Marseille, France

Abstract

This paper presents a technique to resynthesize the sound generated by the vibrations of two piano strings tuned to a very close pitch and coupled at the bridge level. Such a mechanical system produces doublets of components, thus generating beats and double decays on the amplitudes of the partials. We design a digital waveguide model by coupling two elementary digital waveguides. This model is able to reproduce perceptually relevant sounds. The parameters of the model are estimated from the analysis of real signals collected directly on the strings by laser velocimetry. Sound transformations can be achieved by modifying relevant parameters in order to simulate various physical situations.

1. Introduction

Synthesis of piano tones by physical modeling requires the simulation of an intricate chain, triggered by the finger of the pianist, and which consists of the hammer–string impact, the propagation of string vibrations, the interaction between strings and bridge, and the acoustic field radiated from the soundboard (Boutillon, 1990; Askenfelt, 1990). In this study, we focus on the resynthesis of the vibration generated by a system of two coupled piano strings by using digital waveguide synthesis models (Smith, 1992; Smith, 1995). Indeed, in a real piano, two strings (or three for medium and high pitch) tuned to a very close pitch are used to produce the same note. Moreover, each string is tightened between a fixed support (the nut) and a mobile support (the bridge). Thus, the bridge permits interactions between strings, and this coupling generates audible phenomena like beats (Weinreich, 1977). These beats constitute one of the most important features of the piano sound from a perceptual point of view. Daudet et al. (1999) showed that by coupling two elementary

digital waveguides, the vibrations of a single string with two polarizations (i.e., the horizontal and vertical modes of vibrations) could be accurately reproduced. This coupling phenomenon between orthogonal polarizations for one string is similar to the interaction between two strings tuned to a very close pitch and coupled through the bridge.

In this article, we describe a coupled digital waveguide model and see how it can be used to model the vibrations of two coupled strings. For that purpose, we consider only the vertical polarization (in a grand piano) of each string, which represents the most important contribution to the resulting sound. The parameters of this model are estimated from the analysis of real signals. We end up by discussing how these parameters can be changed to simulate various physical configurations.

2. Elementary digital waveguide model for a single string

In this Section, we present a sound synthesis model called digital waveguide model. The first physical approaches of sound synthesis were proposed by Karplus and Strong, who developed a synthesis algorithm (Karplus & Strong, 1983). Then, Julius Smith and David Jaffe applied it to the physics of the plucked string (Jaffe & Smith, 1983). This algorithm was further generalized by Julius Smith, who introduced the theory of “digital waveguides” (Smith, 1987), and extended to two- and three-dimensional acoustic systems. The digital waveguide model simulates the behavior of the solution of a wave propagation equation. Indeed, natural musical sounds are primarily generated by waves that propagate in a bounded medium, called a resonator. Two well-known examples are acoustic pressure (stress waves) in an air column in the case

Accepted: 4 May, 2001

Correspondence: CNRS-Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique, 31, chemin Joseph Aiguier, 13402 Marseille Cedex 20, France.
Tel.: +(33) 4 91 16 42 50; Fax: +(33) 4 91 16 40 12; E-mail: {aramaki, bensa, daudet, guillem, kronland}@lma.cnrs-mrs.fr

of wind instruments and string vibrations (flexural waves) in the case of strings instruments. This digital waveguide model represents in terms of linear filters (in the signal processing sense) the most important features of the propagation of waves between the two extremities of the medium, namely the propagation time, the dissipation, and the dispersion phenomena. These filters can be deduced from the classical stress or flexural wave propagation equations, but more important, they can also be estimated from the analysis of real sounds, allowing the propagation medium to be characterized.

We begin by briefly describing the solution of the propagation equation of transverse vibrations in a stiff constrained string. We then show that the digital waveguide model generates a signal having the same features, and end up by showing how the parameters of the model can be estimated from the analysis of real sounds.

2.1 From the string equation to the digital waveguide model

The propagation of transverse waves in a stiff constrained string is governed by the motion equation (Valette & Cuesta, 1993):

$$\rho_L \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} - T_0 \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} + EI \frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} + R \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = f(x,t) \quad (2.1)$$

where $y(x,t)$ is the transverse displacement, ρ_L the mass of the string per unit length, T_0 the tension, E the Young modulus of the steel, I the quadratic moment of a perpendicular section (for a string, $I = \frac{\pi d^4}{64}$ where d is the diameter of the circular section), R the loss phenomena (both internal and air frictions) along the string, and $f(x,t)$ the excitation.

We assume the following boundary conditions:

$$y(0,t) = 0, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(0,t) = 0, y(L,t) = 0, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(L,t) = 0,$$

where L is the length of the string.

The response of Equation 2.1 to an impulse can be expressed as a sum of exponentially damped partials:

$$y_\delta(x,t) = \sum_n a_n(x) e^{-\alpha_n t} e^{i\omega_n t} \quad \text{for } t \geq 0 \quad (2.2)$$

where a_n is the amplitude of the n^{th} partial and α_n is the damping coefficient, given by:

$$\alpha_n = \frac{R(\omega)}{2\rho_L} \quad (2.3)$$

The frequency of the n^{th} partial is expressed by:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{T_0 \frac{n^2 \pi^2}{L^2} + EI \frac{n^4 \pi^4}{L^4}}{\rho_L} - \frac{R^2}{4\rho_L^2}} \quad (2.4)$$

which is slightly higher than the n^{th} harmonic.

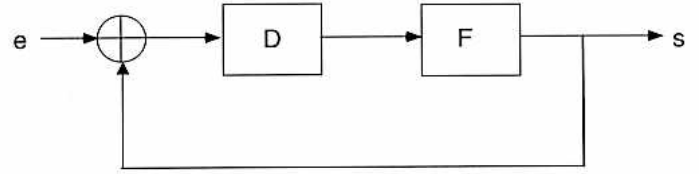


Fig. 1. A simplified digital waveguide model representing a single string.

The digital waveguide model is well adapted to simulating such a behavior, and the physical parameters can be related to the filters of the model. Let us first describe a simplified elementary digital waveguide. Such a model, represented in Figure 1, consists of a loop that contains two filters: filter D is a pure delay ($D(\omega) = e^{-i\omega D}$) that represents the propagation time for the vibration to go back and forth along the string and filter F represents the dissipation (modulus) and dispersion (phase) phenomena (Smith, 1992).

Unlike the usual digital waveguide model, we have chosen to set the output after the propagation line. Actually, D and F are separated variables for the convenience of real time implementation and control, but from a physical point of view, it is more realistic to consider a single filter in which D and F are grouped. This filter would be the digital transcription of Green's function, which physically represents the propagation operator in a medium. This being said, in most musical instruments the waves propagate from the excitation point to the emission point, and it therefore seems natural to use a model that takes this phenomenon into account.

By noting $F(\omega) = |F(\omega)|e^{i\phi(\omega)}$, the transfer function of the elementary digital waveguide model is given by:

$$G(\omega) = \frac{s(\omega)}{e(\omega)} = \frac{|F(\omega)|e^{-i(\omega D - \phi(\omega))}}{1 - |F(\omega)|e^{-i(\omega D - \phi(\omega))}} \quad (2.5)$$

For example, Figure 2 represents the modulus of $G(\omega)$ for $F(\omega) = \text{const} = K$ for all ω .

To obtain the relations between the physical parameters and the filters of this model, we extended the technique described in (Ystad, 1997) and in (Guillemain et al., 1997). Let us first consider in the time domain a Dirac comb exponentially damped. Obviously, it is exactly the output of our digital waveguide model if we choose F to be a constant gain smaller than one. Then, the Fourier transform of this signal is the convolution between a Dirac comb and the Fourier transform of a causal exponential function. Consequently, the spectrum of the impulse response of our digital waveguide model is expressed in a general way by $\sum_n \frac{a_n}{\alpha_n + i(\omega - \omega_n)}$.

We now propose an approximation when F is a frequency dependent gain. We successively consider the direct and the inverse problem.

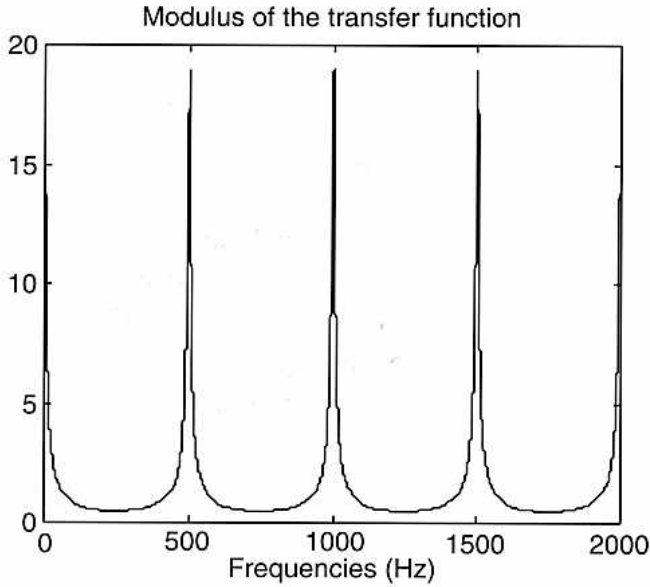


Fig. 2. Example of signal generated by the elementary digital waveguide for a constant gain.

2.2 Direct problem

Let us identify the Fourier transform of 2.2 with the transfer function of the synthesis model:

$$\sum_n \frac{a_n}{\alpha_n + i(\omega - \omega_n)} \approx \frac{|F(\omega)|e^{-i(\omega D - \phi(\omega))}}{1 - |F(\omega)|e^{-i(\omega D - \phi(\omega))}} \quad (2.6)$$

The resonance frequencies are given by the minimum of the denominator $1 - |F(\omega)|e^{-i(\omega D - \phi(\omega))}$. By assuming that the modulus of $F(\omega)$ is close to one, the resonance frequencies are given by the following relation:

$$\omega_n = \frac{2n\pi + \phi(\omega_n)}{D} \quad (2.7)$$

This assumption on the modulus of $F(\omega)$ is physically relevant since $F(\omega)$ represents the losses the traveling waves encounter during their propagation along the string. Considering that a piano string can vibrate more than 20 seconds, if the fundamental frequency is 100 Hz, the wave travels 2000 times, so that $F(\omega)^{2000}$ starts to be small.

By assuming that two successive modes do not overlap (these assumptions are verified for the piano sound) and that $F(\omega)$ is smooth, we can write in the neighborhood of each resonance, for $\omega = \omega_n + \varepsilon$ where ε is arbitrary small:

$$\frac{a_n}{\alpha_n + i\varepsilon} \approx \frac{|F(\omega_n)|e^{-i\varepsilon D}}{1 - |F(\omega_n)|e^{-i\varepsilon D}} \quad (2.8)$$

A limited expansion of $e^{-i\varepsilon D} \approx 1 - i\varepsilon D + \theta(\varepsilon^2)$ around $\varepsilon = 0$ (at the zeroth order for the numerator and at the first order for the denominator) gives the expression:

$$\frac{a_n}{\alpha_n + i\varepsilon} \approx \frac{|F(\omega_n)|}{1 - |F(\omega_n)|(1 - i\varepsilon D)} \quad (2.9)$$

By identifying the coefficients of the two members (considered as functions of the variable ε) one gets the system:

$$\begin{cases} a_n(1 - |F(\omega_n)|) = |F(\omega_n)|\alpha_n \\ \alpha_n |F(\omega_n)| D = |F(\omega_n)| \end{cases} \quad (2.10)$$

which gives the expressions of amplitude a_n and damping coefficient α_n of each partial:

$$a_n = \frac{1}{D}; \quad \alpha_n = \frac{1 - |F(\omega_n)|}{D|F(\omega_n)|} \quad (2.11)$$

2.3 Inverse problem

For resynthesis, we must deal with the inverse problem consisting in estimating the filters F and D of the model through the measured parameters \tilde{a}_n , $\tilde{\alpha}_n$ and $\tilde{\omega}_n$, which are extracted from the analysis of real signals.

Since the string selects only given frequencies, we study the behavior of the filters at frequencies corresponding to the partials generated by the string. By assuming that $\phi(\tilde{\omega}_1) = 0$, then D and the modulus and the phase of F are given by:

$$D = \frac{2\pi}{\tilde{\omega}_1}; \quad |F(\tilde{\omega}_n)| = \frac{1}{\tilde{\alpha}_n D + 1}; \quad \phi(\tilde{\omega}_n) = \tilde{\omega}_n D - 2n\pi \quad (2.12)$$

In practice, resynthesis requires estimating the excitation signal. This excitation can be explicitly obtained by deconvolution at the modal frequencies. Actually:

$$e(\tilde{\omega}_n) = s(\tilde{\omega}_n)G^{-1}(\tilde{\omega}_n) \quad (2.13)$$

By introducing the expressions of $G(\omega)$ (Eq. 2.5) and $s(\omega)$ (Fourier transform of Eq. 2.2) one gets:

$$e(\tilde{\omega}_n) = \tilde{a}_n D \quad (2.14)$$

These expressions give a good estimation of the excitation signal, leading to a good resynthesis. Actually, it takes into account both the amplitude and the relative phase of the component (a_n is complex valued here) and permits a good reproduction of the attack.

2.4 Parameter estimation from the analysis of real sounds

To estimate all the amplitudes, frequencies, and damping factors of each component of a real signal, we use a two-step process.

The first step consists in isolating each component by a band pass filtering centered on the average frequency. This average frequency is first roughly determined according to the physical characteristics of the string by establishing the fundamental frequency and an estimate of the inharmonicity law according to formula 2.4. It is then determined more precisely by averaging the instantaneous frequency of the analytic signal associated with each filtered component (cf. annex A). To isolate each component, we use a gaussian window. Its frequency bandwidth is adapted to numerically

minimize the smoothing effects at the attack time and to avoid the overlapping of two successive components, which causes interference effects. There are two main reasons for the gaussian choice. This function minimizes the time-frequency uncertainty principle and preserves the exponential damping when convoluted with an exponentially damped sine wave.

As a second step, a parametric modeling of each component is performed. To work on a small number of samples for better efficiency from a computational point of view, we first demodulate the component by its average frequency, allowing it to be subsampled drastically. Typically, we work on a 512-point sequence, with an original signal one thousand times longer (about 10 seconds). The time origin of the signal is then shifted to remove the biased part around the onset. Moreover, to avoid problems related to the poor signal to noise ratio at high frequency, the duration on which the estimation is performed is restrained to the significant part of the signal. This part is related to the physics of the thermoelastic and air friction loss phenomena generating a frequency dependent dissipation (Valette & Cuesta, 1993). The resulting signal is then modeled using the Steiglitz-McBride method (Steiglitz & McBride, 1965), which consists in finding an IIR filter with a prescribed time domain impulse response. For that purpose, the method attempts to minimize the squared error between the impulse response corresponding to the IIR filter and the input signal.

If one constrains the method to estimate a non zero and one pole IIR filter, then amplitude, frequency, and decay time are directly deduced from the coefficients of the filter. Indeed, by identifying near each component, the expression of the IIR filter and the Z-transform of 2.2, we write:

$$\frac{b(1)}{a(1) + a(2)z^{-1}} = \frac{a_n}{1 - e^{-\beta} z^{-1}} \quad (2.15)$$

where $\beta = (\alpha_n - i\omega_n)$. Thus, we can deduce the parameters a_n , α_n and ω_n as a function of the filter coefficients.

We have also tested various minimization methods (among them classical Linear Prediction Coding and Prony) and found that the iterative Steiglitz-McBride method was more robust for our problem. After this estimation, the amplitudes and absolute phases are modified to reestablish the correct origin of time.

To more accurately estimate the parameters, we used as much a-priori knowledge as possible of the physical phenomena and of their consequences on the experimental signals. This is why we used the two-step process developed in 2.4. Indeed, the global parametric estimation we tried on the whole signal led to unconvincing results.

Figure 3 represents the modulus of F extracted from experimental data. As expected, F is close to one for all ω .

At this point, one can resynthesize a given sound by using the elementary digital waveguide and the parameters extracted from the analysis. For the synthetic sounds to be identical to the original one requires precisely describing filter F . This can be achieved by implementing the model in the frequency domain, allowing one to take into account the

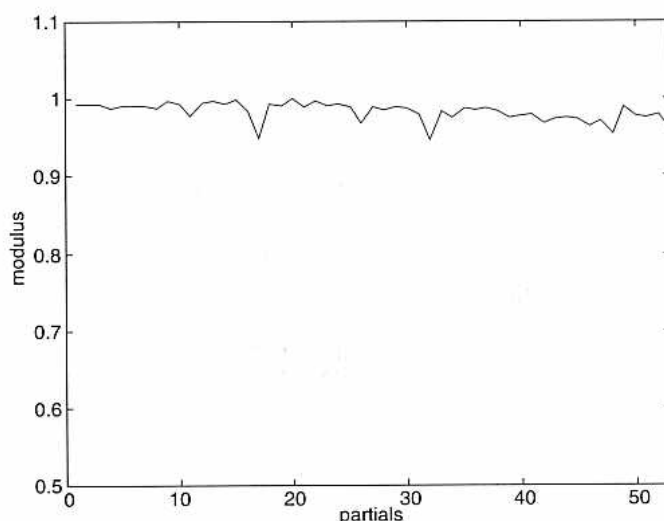


Fig. 3. Modulus of filter F extracted from experimental data.

exact amplitude and the phase of the filter. Nevertheless for synthesis purposes, filter F can be approached by a second order IIR filter as it is usually done (see for example (Välimäki et al., 1996)). The sounds generated by this elementary digital waveguide model are very close to the original ones. Nevertheless, when seeking to reproduce the sound corresponding to a couple of strings, this simple model leads to an unnatural sound. To reconstitute perceptual phenomena like beats, we have designed a coupled digital waveguide model.

3. Digital waveguide model for two coupled strings

We consider a system of two strings belonging to a same doublet and coupled through the bridge. The digital synthesis model used to simulate the behavior of this system is similar to the model used for a string with two polarizations (Daudet et al., 1999).

To form the coupled digital waveguide model represented in Figure 4, we link the output of an elementary digital waveguide with the input of another waveguide through filters.

The coupling elements of the model are filters C_1 and C_2 . We assume that this coupling is localized at one end of the strings, namely the bridge. This model is an extension of previous synthesis schemes, in particular the guitar model of Karjalainen et al. (Karjalainen et al., 1998; Välimäki et al., 1996), which takes into account multiple strings. Their model can reproduce some of the effects generated by the interaction between strings; nevertheless, as the coupling elements are constant real gains, that model gives the same behavior for all partials. In the case of the piano, it is well known that very distinct behaviors are observed for different partials (Askenfelt, 1990). Another approach was taken by Julius Smith (Smith, 1993). Two strings are coupled with the same termination through a unique coupling filter. In our model, we use the more general complex-valued frequency-

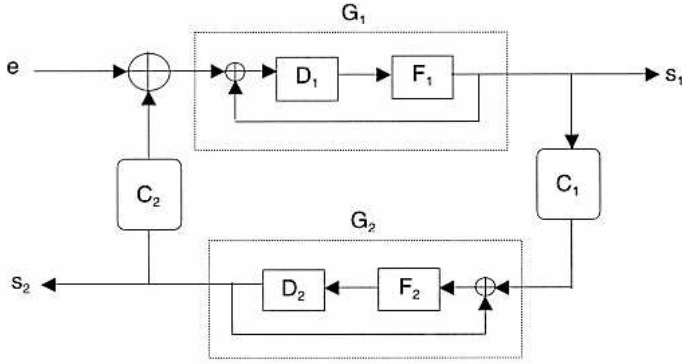


Fig. 4. Coupled digital waveguide model. e represents the input of the model, s_1 is the output at the string 1 level (the excited string) and s_2 the output at the string 2 level (the string excited by the coupling). C_1 and C_2 are the coupling filters.

dependent linear filters for the coupling: C_1 is related to the amount of energy transferred from string 1 to string 2, and similarly C_2 is related to the amount of energy transferred from string 2 to string 1. From a physical point of view, it is natural to consider complex-valued coupling filters since the phase can change during the energy transfer. From a modeling point of view, one can show that the real and imaginary parts act on two separate features of the signal (frequency gaps between the two components of a doublet and decay times of the two components of a doublet).

As we are interested in describing the coupling, we assume that only one string is excited. Nevertheless, our model can be easily extended to handle excitation on both strings, as on a real piano.

3.1 Transfer functions of the coupled model

The transfer functions of the coupled digital waveguide model are given by:

$$T_1(\omega) = \frac{s_1(\omega)}{e(\omega)} = \frac{G_1(\omega)}{1 - C_1(\omega)C_2(\omega)G_1(\omega)G_2(\omega)} \quad (3.1)$$

$$T_2(\omega) = \frac{s_2(\omega)}{e(\omega)} = \frac{C_1(\omega)G_1(\omega)G_2(\omega)}{1 - C_1(\omega)C_2(\omega)G_1(\omega)G_2(\omega)} \quad (3.2)$$

Each element $G_1(\omega)$ and $G_2(\omega)$, which represent each string, is equivalent to the simplified elementary digital waveguide model. Their expressions are the same as Equation 2.5. Indeed,

$$\text{they are given by } G_{i=1,2}(\omega) = \frac{|F_{i=1,2}(\omega)|e^{-i(\omega D_{i=1,2} - \phi_{i=1,2}(\omega))}}{1 - |F_{i=1,2}(\omega)|e^{-i(\omega D_{i=1,2} - \phi_{i=1,2}(\omega))}}.$$

Without loss of generality, one can assume that $D_1 = D_2 = D$, since the difference in delays can be taken into account in the phase of F_1 and F_2 . Moreover, we aim at modeling a system of two strings of the same length and tuned to a very close pitch. By replacing $G_1(\omega)$ and $G_2(\omega)$ with their respective expressions, one can write:

$$T_1(\omega) = \frac{F_1(\omega)e^{-i\omega D}(1 - F_2(\omega)e^{-i\omega D})}{[(1 - F_1(\omega)e^{-i\omega D})(1 - F_2(\omega)e^{-i\omega D}) - C_1(\omega)C_2(\omega)F_1(\omega)F_2(\omega)e^{-2i\omega D}]} \quad (3.3)$$

$$T_2(\omega) = \frac{C_1(\omega)F_1(\omega)F_2(\omega)e^{-2i\omega D}}{[(1 - F_1(\omega)e^{-i\omega D})(1 - F_2(\omega)e^{-i\omega D}) - C_1(\omega)C_2(\omega)F_1(\omega)F_2(\omega)e^{-2i\omega D}]} \quad (3.4)$$

The filters C_1 , C_2 , F_1 and F_2 are assumed to vary more slowly as a function of ω than does the delay term $e^{-i\omega D}$. $T_1(\omega)$ and $T_2(\omega)$ have the same denominator and thus generate the same resonance frequencies.

Since each transfer function is a rational fraction of second order polynomials in $e^{-i\omega D}$, they can be decomposed into a sum of two rational fractions of the first-order polynomials in $e^{-i\omega D}$:

$$T_1(\omega) = \frac{P(\omega)e^{-i\omega D}}{1 - X(\omega)e^{-i\omega D}} + \frac{Q(\omega)e^{-i\omega D}}{1 - Y(\omega)e^{-i\omega D}} \quad (3.5)$$

$$T_2(\omega) = \frac{R(\omega)e^{-i\omega D}}{1 - X(\omega)e^{-i\omega D}} + \frac{S(\omega)e^{-i\omega D}}{1 - Y(\omega)e^{-i\omega D}} \quad (3.6)$$

The vibrations generated by the model are assimilated to a superposition of two series of partials whose frequencies and decay times are governed by the quantities $X(\omega)$ and $Y(\omega)$.

By identification between 3.3–3.5 and 3.4–3.6, we can determine the following system of 6 equations:

$$X(\omega) + Y(\omega) = F_1(\omega) + F_2(\omega) \quad (3.7)$$

$$X(\omega)Y(\omega) = F_1(\omega)F_2(\omega)(1 - C_1(\omega)C_2(\omega)) \quad (3.8)$$

$$P(\omega) + Q(\omega) = F_1(\omega) \quad (3.9)$$

$$P(\omega)Y(\omega) + Q(\omega)X(\omega) = F_1(\omega)F_2(\omega) \quad (3.10)$$

$$R(\omega) + S(\omega) = 0 \quad (3.11)$$

$$R(\omega)Y(\omega) + S(\omega)X(\omega) = -C_1(\omega)F_1(\omega)F_2(\omega) \quad (3.12)$$

By solving this system, we can deduce the expressions of the coefficients $X(\omega)$, $Y(\omega)$, $P(\omega)$, $Q(\omega)$, $R(\omega)$, and $S(\omega)$ from the parameters of the synthesis model (namely the filters). They are explicitly given by:

$$X(\omega) = \frac{F_1(\omega) + F_2(\omega)}{2} + \sqrt{\left(\frac{F_1(\omega) - F_2(\omega)}{2}\right)^2 + F_1(\omega)F_2(\omega)C_1(\omega)C_2(\omega)} \quad (3.13)$$

$$Y(\omega) = \frac{F_1(\omega) + F_2(\omega)}{2} - \sqrt{\left(\frac{F_1(\omega) - F_2(\omega)}{2}\right)^2 + F_1(\omega)F_2(\omega)C_1(\omega)C_2(\omega)} \quad (3.14)$$

$$P(\omega) = \frac{F_1(\omega)[F_2(\omega) - X(\omega)]}{Y(\omega) - X(\omega)}; Q(\omega) = \frac{F_1(\omega)[Y(\omega) - F_2(\omega)]}{Y(\omega) - X(\omega)} \quad (3.15)$$

$$R(\omega) = \frac{-C_1(\omega)F_1(\omega)F_2(\omega)}{Y(\omega) - X(\omega)}; \quad S(\omega) = \frac{C_1(\omega)F_1(\omega)F_2(\omega)}{Y(\omega) - X(\omega)} \quad (3.16)$$

3.2 Direct problem (Characterization of the signals generated by the coupled model)

The coupling phenomenon modifies the eigen frequencies of each independent string. By considering a partial of the spectrum of one vibrating string, a double resonance appears even if the two strings are identical. Figure 5 shows such a doublet extracted from a signal measured on our experimental setup presented in Section 4. The two frequencies of the resonance correspond to the eigen frequencies of the coupled system. Thus, each partial generated by our model consists in two damping coefficients and two very close eigen frequencies.

Similarly to what has been done in Section 2, we can write the impulse response of the model as a double sum of exponentially damped sinusoids, for the string directly excited and for the string excited by coupling:

$$s_1(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} a_k e^{-\alpha_k t} e^{i\omega_{1k} t} + b_k e^{-\beta_k t} e^{i\omega_{2k} t} \quad \text{for } t \geq 0 \quad (3.17)$$

$$s_2(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} c_k e^{-\alpha_k t} e^{i\omega_{1k} t} + d_k e^{-\beta_k t} e^{i\omega_{2k} t} \quad \text{for } t \geq 0 \quad (3.18)$$

The unknown parameters are the amplitudes of each component a_k, b_k, c_k, d_k , the damping coefficients α_k and β_k , and the resonance frequencies ω_{1k} and ω_{2k} . In this paragraph we express these parameters as functions of the synthesis model filters.

The Fourier transforms of $s_1(t)$ and $s_2(t)$ are given by:

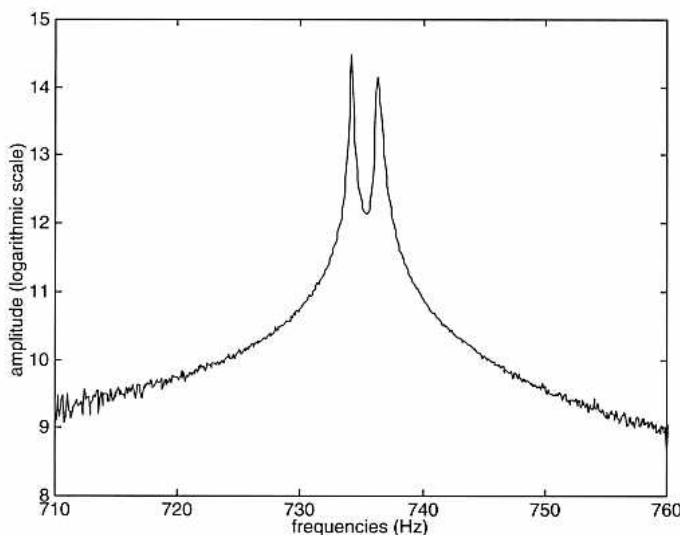


Fig. 5. A partial extracted from the spectrum of one string of a system of two coupled strings. The signal was measured on the experimental setup presented in Section 4.

$$S_1(\omega) = \sum_k \frac{a_k}{\alpha_k + i(\omega - \omega_{1k})} + \frac{b_k}{\beta_k + i(\omega - \omega_{2k})} \quad (3.19)$$

$$S_2(\omega) = \sum_k \frac{c_k}{\alpha_k + i(\omega - \omega_{1k})} + \frac{d_k}{\beta_k + i(\omega - \omega_{2k})} \quad (3.20)$$

We study the behavior of the two transfer functions near each double resonance. We identify locally $S_1(\omega)$ and $S_2(\omega)$ to the expressions of the two transfer functions. By writing $X(\omega) = |X(\omega)|e^{i\Phi_X(\omega)}$ and $Y(\omega) = |Y(\omega)|e^{i\Phi_Y(\omega)}$, we express the transfer functions near each double resonance as:

$$\frac{P(\omega)e^{-i\omega D}}{1 - |X(\omega)|e^{-i(\omega D - \Phi_X(\omega))}} + \frac{Q(\omega)e^{-i\omega D}}{1 - |Y(\omega)|e^{-i(\omega D - \Phi_Y(\omega))}} \approx \frac{a_k}{\alpha_k + i(\omega - \omega_{1k})} + \frac{b_k}{\beta_k + i(\omega - \omega_{2k})} \quad (3.21)$$

$$\frac{R(\omega)e^{-i\omega D}}{1 - |X(\omega)|e^{-i(\omega D - \Phi_X(\omega))}} + \frac{S(\omega)e^{-i\omega D}}{1 - |Y(\omega)|e^{-i(\omega D - \Phi_Y(\omega))}} \approx \frac{c_k}{\alpha_k + i(\omega - \omega_{1k})} + \frac{d_k}{\beta_k + i(\omega - \omega_{2k})} \quad (3.22)$$

The resonance frequencies of each doublet ω_{1k} and ω_{2k} correspond to the minimum of the two denominators $1 - |X(\omega)|e^{-i(\omega D - \Phi_X(\omega))}$ and $1 - |Y(\omega)|e^{-i(\omega D - \Phi_Y(\omega))}$. If we assume that modulus $|X(\omega)|$ and $|Y(\omega)|$ are close to one (this assumption is realistic because the propagation is weakly damped), we can determine the values of ω_{1k} and ω_{2k} :

$$\omega_{1k} = \frac{2k\pi + \Phi_X(\omega_{1k})}{D} \quad (3.23)$$

$$\omega_{2k} = \frac{2k\pi + \Phi_Y(\omega_{2k})}{D} \quad (3.24)$$

We can identify term by term in the two relations 3.21 and 3.22:

$$\frac{P(\omega)e^{-i\omega D}}{1 - |X(\omega)|e^{-i(\omega D - \Phi_X(\omega))}} \approx \frac{a_k}{\alpha_k + i(\omega - \omega_{1k})}; \quad \frac{Q(\omega)e^{-i\omega D}}{1 - |Y(\omega)|e^{-i(\omega D - \Phi_Y(\omega))}} \approx \frac{b_k}{\beta_k + i(\omega - \omega_{2k})} \quad (3.25)$$

$$\frac{R(\omega)e^{-i\omega D}}{1 - |X(\omega)|e^{-i(\omega D - \Phi_X(\omega))}} \approx \frac{c_k}{\alpha_k + i(\omega - \omega_{1k})}; \quad \frac{S(\omega)e^{-i\omega D}}{1 - |Y(\omega)|e^{-i(\omega D - \Phi_Y(\omega))}} \approx \frac{d_k}{\beta_k + i(\omega - \omega_{2k})} \quad (3.26)$$

For example, the first expression is written for $\omega = \omega_{1k} + \varepsilon$ with ε arbitrarily small:

$$\frac{P(\omega_{1k} + \varepsilon)e^{-i\Phi_X(\omega_{1k} + \varepsilon)}e^{-i\varepsilon D}}{1 - |X(\omega_{1k} + \varepsilon)|e^{-i\varepsilon D}} = \frac{a_k}{\alpha_k + i\varepsilon} \quad (3.27)$$

As in Section 2, a limited expansion of $e^{-i\varepsilon D} \approx 1 - i\varepsilon D + \theta(\varepsilon^2)$ around $\varepsilon = 0$ (at the zeroth order for the numerator and at the first order for the denominator) gives:

$$P(\omega_{1k} + \varepsilon)e^{-i\Phi_X(\omega_{1k} + \varepsilon)}e^{-i\varepsilon D} \approx P(\omega_{1k})e^{-i\Phi_X(\omega_{1k})} \quad (3.28)$$

$$1 - |X(\omega_{1k} + \varepsilon)|e^{-i\varepsilon D} \approx 1 - |X(\omega_{1k})|(1 - i\varepsilon D) \quad (3.29)$$

Assuming that $P(\omega)$ and $|X(\omega)|$ are locally constant, we identify term by term (the two members are considered as functions of the variable ε) and deduce the expressions of the amplitudes and decay times coefficients a_k and α_k for each mode. The same method is used for the other three expressions.

The amplitudes of each partial are expressed by:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{P(\omega_{1k})}{DX(\omega_{1k})}; & b_k &= \frac{Q(\omega_{2k})}{DY(\omega_{2k})}; \\ c_k &= \frac{R(\omega_{1k})}{DX(\omega_{1k})}; & d_k &= \frac{S(\omega_{2k})}{DY(\omega_{2k})} \end{aligned} \quad (3.30)$$

Then, the decay time constants are given by:

$$\alpha_k = \frac{1 - |X(\omega_{1k})|}{D|X(\omega_{1k})|}; \quad \beta_k = \frac{1 - |Y(\omega_{2k})|}{D|Y(\omega_{2k})|} \quad (3.31)$$

Thus, the parameters of the temporal signals (eigen frequencies, amplitudes, and decay times of each partial) generated by the coupled model are totally defined.

3.3 Inverse Problem (Parameter estimation from the analysis of real sounds)

In the framework of analysis-synthesis, we are faced with the inverse problem, which consists in building the elements of the coupled waveguide model from the analysis of real sounds. Solving this problem leads to an estimate of the filters of the model at the resonance frequencies. These estimations depend on the amplitudes, decay times, and frequencies of the partials (Daudet et al., 1999). Those parameters are estimated from the analysis of real signals and are denoted $\tilde{a}_k, \tilde{b}_k, \tilde{c}_k, \tilde{d}_k, \tilde{\alpha}_k, \tilde{\beta}_k, \tilde{\omega}_{1k}, \tilde{\omega}_{2k}$.

The expressions 3.23, 3.24, and 3.31 give for the modulus and the phases of $X(\omega)$ and $Y(\omega)$:

$$|X(\tilde{\omega}_{1k})| = \frac{1}{\tilde{\alpha}_k D + 1}; \quad |Y(\tilde{\omega}_{2k})| = \frac{1}{\tilde{\beta}_k D + 1} \quad (3.32)$$

$$\Phi_X(\tilde{\omega}_{1k}) = \tilde{\omega}_{1k} D - 2k\pi; \quad \Phi_Y(\tilde{\omega}_{2k}) = \tilde{\omega}_{2k} D - 2k\pi \quad (3.33)$$

From 3.30, we can deduce:

$$\frac{P(\tilde{\omega}_{1k})}{Q(\tilde{\omega}_{2k})} = \frac{\tilde{a}_k X(\tilde{\omega}_{1k})}{\tilde{b}_k Y(\tilde{\omega}_{2k})} \quad (3.34)$$

From 3.15, we write:

$$\frac{P(\omega)}{Q(\omega)} = \frac{F_2(\omega) - X(\omega)}{Y(\omega) - F_2(\omega)} \quad (3.35)$$

Assuming that the two resonance frequencies are close and that the coefficients $P(\omega)$, $Q(\omega)$, $X(\omega)$, $Y(\omega)$ have a locally smooth behavior, we can compare 3.34 and 3.35. The expression of filter F_2 is deduced:

$$F_2(\tilde{\omega}_{1k}) \approx F_2(\tilde{\omega}_{2k}) = \frac{(\tilde{a}_k + \tilde{b}_k)X(\tilde{\omega}_{1k})Y(\tilde{\omega}_{2k})}{\tilde{a}_k X(\tilde{\omega}_{1k}) + \tilde{b}_k Y(\tilde{\omega}_{2k})} \quad (3.36)$$

Using the first expression of 3.15 and 3.30, filter F_1 can be expressed by:

$$F_1(\tilde{\omega}_{1k}) \approx F_1(\tilde{\omega}_{2k}) = \frac{\tilde{a}_k X(\tilde{\omega}_{1k})^2 + \tilde{b}_k Y(\tilde{\omega}_{2k})^2}{\tilde{a}_k X(\tilde{\omega}_{1k}) + \tilde{b}_k Y(\tilde{\omega}_{2k})} \quad (3.37)$$

In the same way, using relation 3.8, 3.36 and 3.37 the product between the two coupling filters is given by:

$$\begin{aligned} C_1(\tilde{\omega}_{1k})C_2(\tilde{\omega}_{1k}) &\approx C_1(\tilde{\omega}_{2k})C_2(\tilde{\omega}_{2k}) \\ &= \frac{\tilde{a}_k \tilde{b}_k (X(\tilde{\omega}_{1k}) - Y(\tilde{\omega}_{2k}))^2}{(\tilde{a}_k + \tilde{b}_k)(\tilde{a}_k X(\tilde{\omega}_{1k})^2 + \tilde{b}_k Y(\tilde{\omega}_{2k})^2)} \end{aligned} \quad (3.38)$$

The spectrum of the excitation is assumed to be locally constant ($e(\tilde{\omega}_{1k}) \approx e(\tilde{\omega}_{2k})$).

As in Section 2.2 for equation 2.14, we get the following equations by deconvolution:

$$e(\tilde{\omega}_{1k})P(\tilde{\omega}_{1k}) = \tilde{a}_k DX(\tilde{\omega}_{1k}) \quad (3.39)$$

$$e(\tilde{\omega}_{2k})Q(\tilde{\omega}_{2k}) = \tilde{b}_k DY(\tilde{\omega}_{2k}) \quad (3.40)$$

We deduce:

$$\begin{aligned} e(\tilde{\omega}_{1k})(P(\tilde{\omega}_{1k})Y(\tilde{\omega}_{2k}) + Q(\tilde{\omega}_{2k})X(\tilde{\omega}_{1k})) \\ = D(\tilde{a}_k + \tilde{b}_k)X(\tilde{\omega}_{1k})Y(\tilde{\omega}_{2k}) \end{aligned} \quad (3.41)$$

Using relation 3.10, the excitation can be expressed as:

$$e(\tilde{\omega}_{1k}) \approx e(\tilde{\omega}_{2k}) = \frac{D(\tilde{a}_k X(\tilde{\omega}_{1k}) + \tilde{b}_k Y(\tilde{\omega}_{2k}))^2}{\tilde{a}_k X(\tilde{\omega}_{1k})^2 + \tilde{b}_k Y(\tilde{\omega}_{2k})^2} \quad (3.42)$$

Assuming that $R(\omega)$ and $S(\omega)$ are regular enough, from equations 3.10, 3.12, 3.38, 3.39, 3.40 and from the following equations:

$$e(\tilde{\omega}_{2k})R(\tilde{\omega}_{1k}) = \tilde{c}_k DX(\tilde{\omega}_{1k}); \quad e(\tilde{\omega}_{2k})S(\tilde{\omega}_{2k}) = \tilde{d}_k DY(\tilde{\omega}_{2k}) \quad (3.43)$$

we deduce the expression of the coupling filters C_1 and C_2 separately:

$$C_1(\tilde{\omega}_{1k}) \approx C_1(\tilde{\omega}_{2k}) = -\frac{\tilde{c}_k + \tilde{d}_k}{\tilde{a}_k + \tilde{b}_k} \quad (3.44)$$

$$C_2(\tilde{\omega}_{1k}) \approx C_2(\tilde{\omega}_{2k}) = -\frac{\tilde{a}_k \tilde{b}_k (X(\tilde{\omega}_{1k}) - Y(\tilde{\omega}_{2k}))^2}{(\tilde{c}_k + \tilde{d}_k)(\tilde{a}_k X(\tilde{\omega}_{1k})^2 + \tilde{b}_k Y(\tilde{\omega}_{2k})^2)} \quad (3.45)$$

4. Practical results

4.1 Measurements

Real signals have been collected from the experimental setup in Figure 6. This setup is constituted of a massive concrete beam embedded in a concrete base at one extremity and free

at the other one (the whole weight is about 300 kg). Thus, we assume that the resonance frequency of the structure is very low in comparison to the one of the strings. At the top of the beam, we fixed a piece of a bridge taken from a real piano and a block system to tighten strings. At the middle of the beam, we fixed a hard wood support on which we screwed a

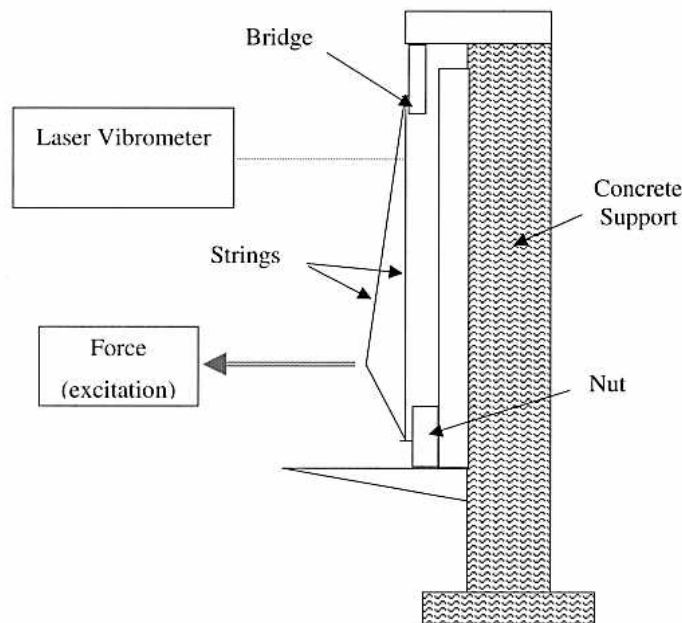


Fig. 6. Side view of the setup.

piece of a nut. The strings are then tightened between the bridge and the nut. Thus, their boundary conditions are close to those of a real piano because the piece of bridge is on a mobile support and the nut on a fixed support. The strings are tuned manually to the closest sounding pitch. We measured velocity on strings at a single location (near the bridge) by laser velocimetry. The signals are directly collected on Digital Audio Tape.

The excitation principle chosen has the advantage of being quasi-reproducible: we pull the string with a constant strength (by weights and nylon thread) in the direction perpendicular to the bridge. For the calibration of our model, only one string is excited. A small mass (100 g) is used in order to remain in a linear domain of string displacement.

The velocity measured on the plucked string corresponds to the signal s_1 (of the model in Fig. 4), and the velocity measured on the string excited by sympathetic coupling corresponds to signal s_2 . One drawback of this setup is that it is impossible to get the two signals simultaneously (we only have one vibrometer), and the time origin of two signals (obtained separately) has to be adjusted by hand.

As expected, the attack of the excited string is sharp whereas the amplitude of the signal from the coupled string increases slowly from zero. Figure 7 shows the whole spectrum obtained by Fourier transform of the signal. It can contain more than fifty partials. Some of them are very attenuated: this is the phenomenon of rejection, which depends on the location of both the excitation point and the measurement point.

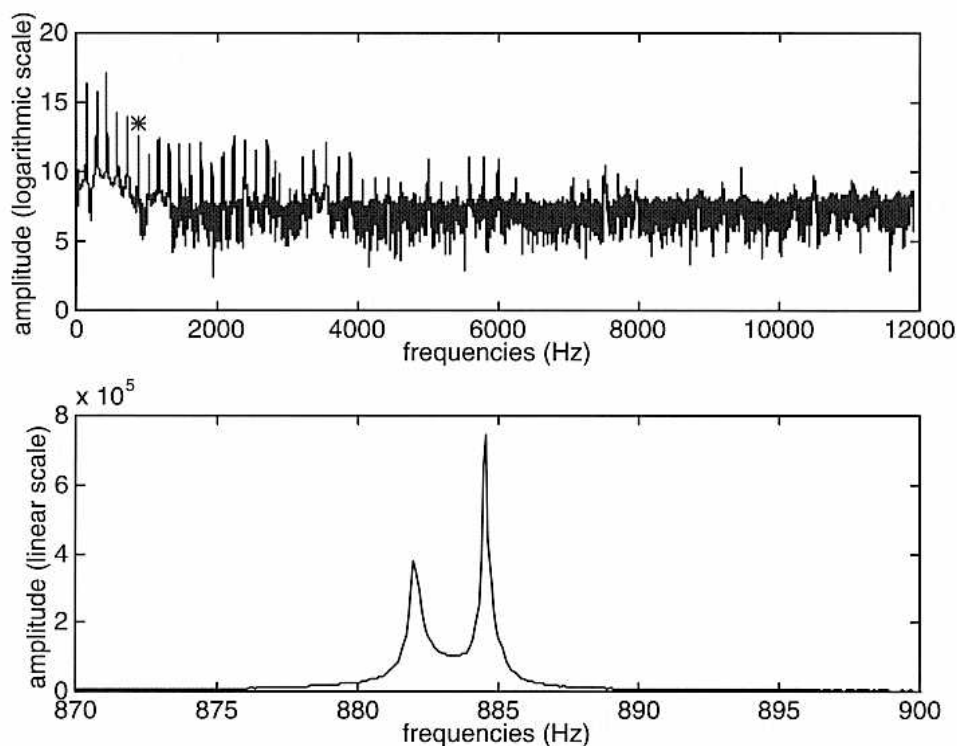


Fig. 7. String excited by sympathetic coupling. Top: spectrum of the real signal. Bottom: blow up of the spectrum measured around the 6th partial (marked by an asterisk on the top graph).

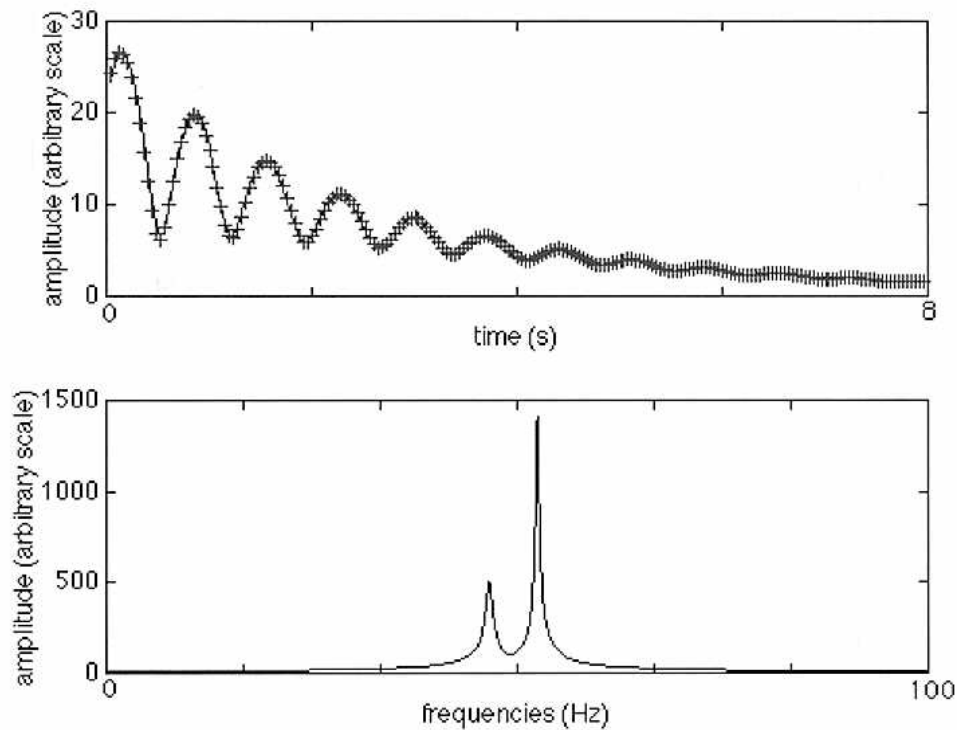


Fig. 8. 6th partial, string excited by sympathetic coupling. Top: superposition of the measured (—) and the estimated (+) amplitude modulation law. Bottom: blow up of the estimated spectrum.

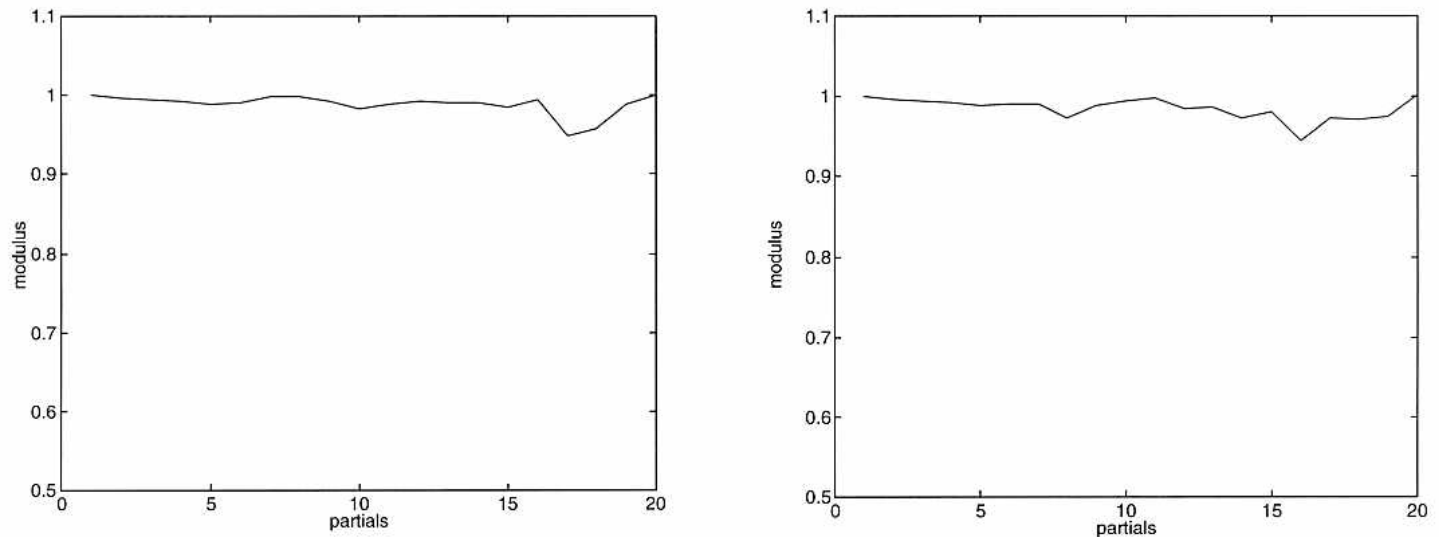


Fig. 9. Modulus of the filters F_1 and F_2 as functions of the index of the partials.

4.2 Parameter estimation

To estimate all the amplitudes, frequencies, and damping factors of each doublet of a real signal, we use the same two-step process as for each single component (see Section 2.4). The first step works on a doublet of components instead of on a single one. The second step uses a one zero and two poles parametric modeling with the Steiglitz-McBride method. For example, the top of Figure 8 shows a comparison between the amplitude modulation laws experimentally

measured and numerically estimated by the Steiglitz-McBride method for the 6th partial of the string excited by sympathetic coupling. It clearly shows the beat phenomena characteristic of the piano sound.

The modulus of the filters F_1 and F_2 (Fig. 9) are very close to one. Again, the propagation is weakly damped and this damping is due to the intrinsic losses within the string (viscoelastic, thermoelastic . . .) and to an energy transfer to the bridge (Valette & Cuesta, 1993).

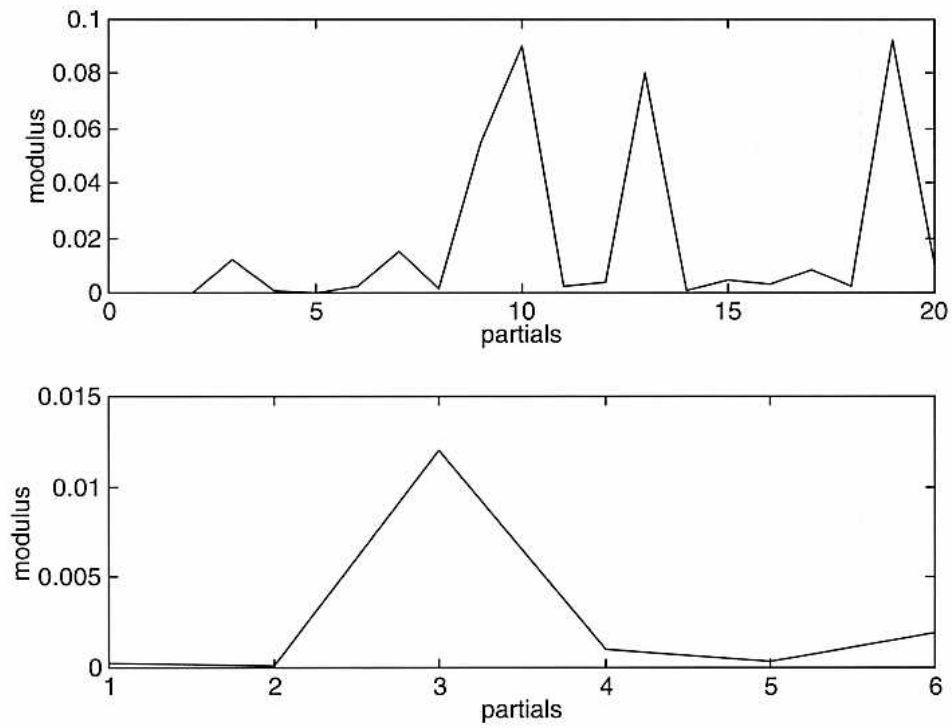


Fig. 10. Top: Modulus of the coupling filter C_1 as a function of the index of the partials. Bottom: blow up of the graph around the third partial.

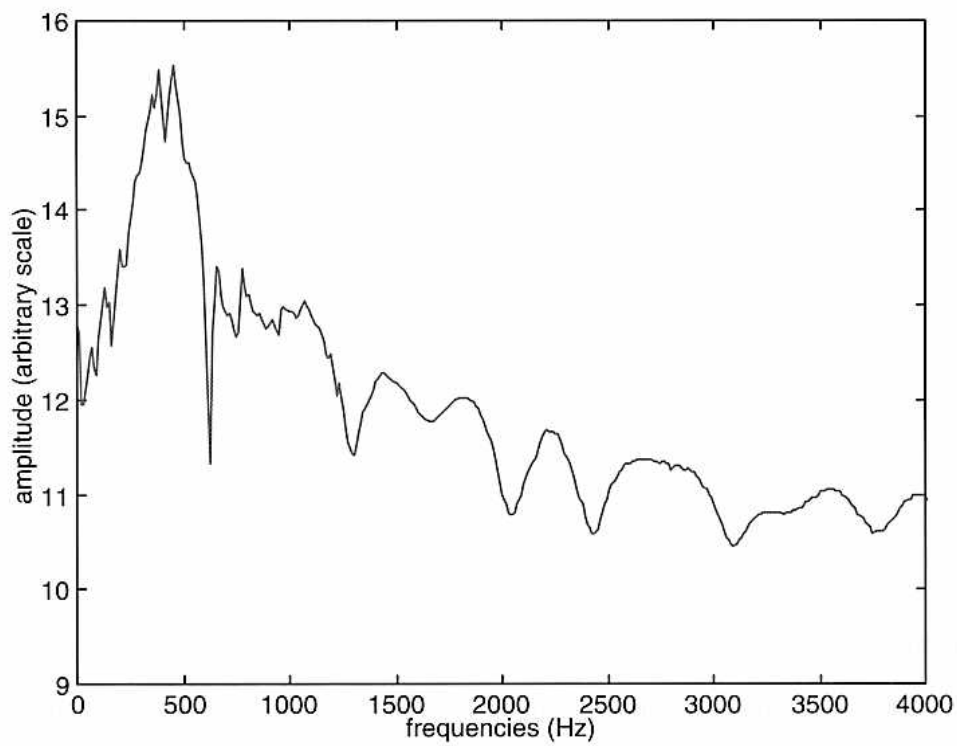


Fig. 11. Frequency response of the bridge as function of the frequency (in Hz).

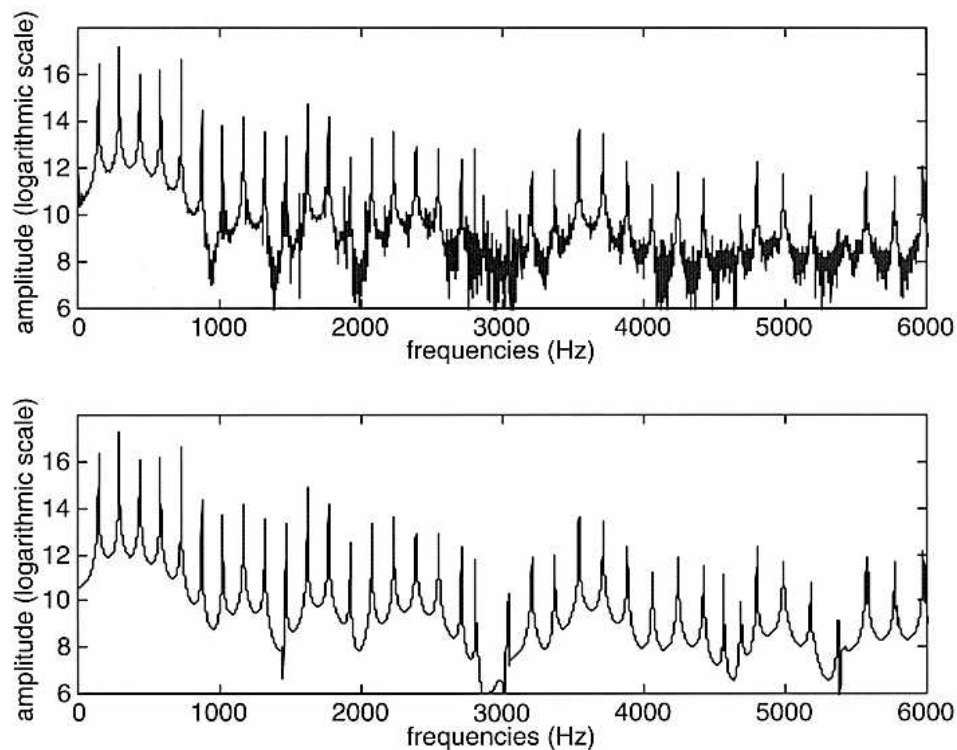


Fig. 12. Spectrum of the signal. Top: original signal. Bottom: resynthesized signal.

Figure 10 shows the modulus of the coupling filter C_1 for the first 20 partials. For some partials of very high order (typically higher than 20), the algorithm can become unstable. Nevertheless, this does not create any perceivable artifact because these partials convey very little energy.

The bottom of Figure 10 is a blow-up around the third partial. The peak here shows that coupling is large at this frequency. To know if the behavior of the coupling filters is linked to the transfer function of the bridge, we measured its response to a hammer shock while the strings were blocked. The analysis of the signal provided the frequency response of the bridge (Fig. 11).

Figure 11 shows a resonance around 470 Hz, which corresponds to the third partial of the coupled strings. Clearly the frequency response of the bridge corresponds to the values of the coupling filters.

4.3 Resynthesis of sounds

We have implemented the coupled digital waveguide model to resynthesize real sounds. For that purpose, we used a precise description of the filters by implementing the model in the frequency domain. In the context of simulation of piano sound, implementation can be simplified through an approximation of the IIR low order filters.

The model allows the reproduction of the signal measured on the experimental setup. From a perceptual point of view the resynthesized sounds are identical to the original ones. To evaluate the accuracy of our method, we represent on

Figure 12 the original and the resynthesized spectrum for the plucked string.

The perceptual characteristics of the original spectrum are clearly well preserved.

Figures 13 and 14 show the amplitude modulation laws of the first eight partials of the plucked string as a function of the time in the measured (solid line) and resynthesized (dotted line) case. The beat phenomena are well reproduced, leading to a perceptively identical resynthesized sound.

The experimental data concerning the coupled string cannot be fully exploited because of the way the excitation has been experimentally produced. The two strings are tightened very close to each other. Cutting the thread inevitably causes the sympathetic string to be hit. This slightly modifies the attack of the signal generated by the coupled string, which cannot be taken into account in our model. Nevertheless, even if the spectra corresponding to the real and the synthetic signal differ slightly, the synthetic sound reproduces well the main perceptive phenomena.

5. Using the model: Synthesis with transformations

Sounds can be transformed by modifying some parameters of the model. First, we can modify D_1 and D_2 . This transformation is close to the physical change of the length of the strings. The sound produced is satisfactory from a perceptive point of view.

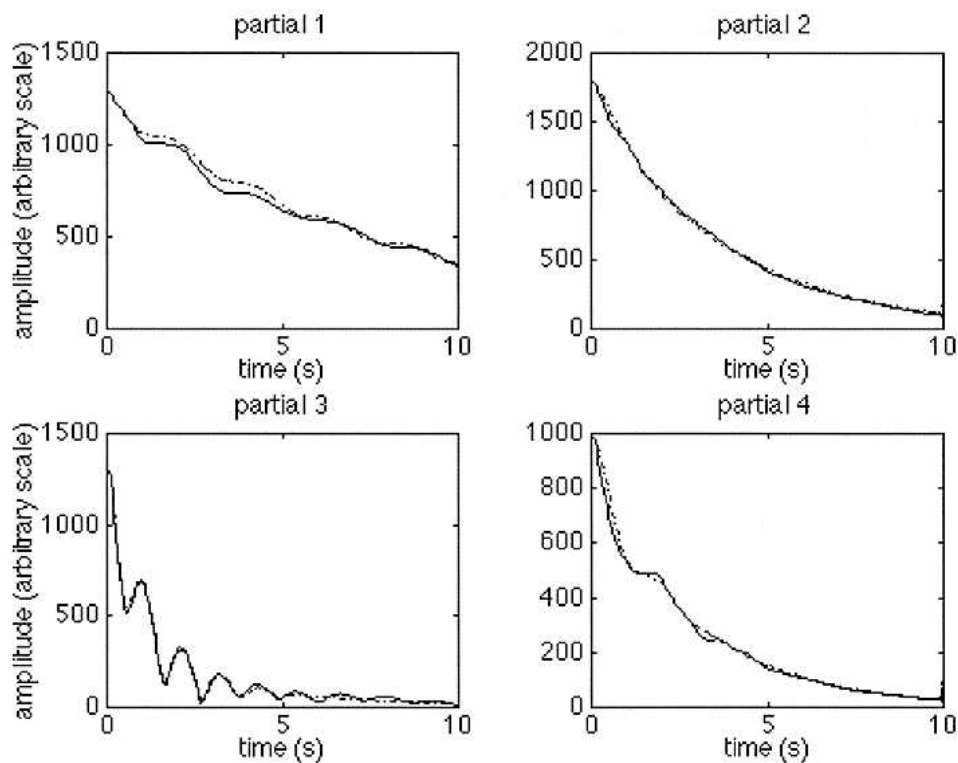


Fig. 13. Amplitude modulation laws for the first four partials for the plucked string. Original (solid line) and resynthesized (dotted line).

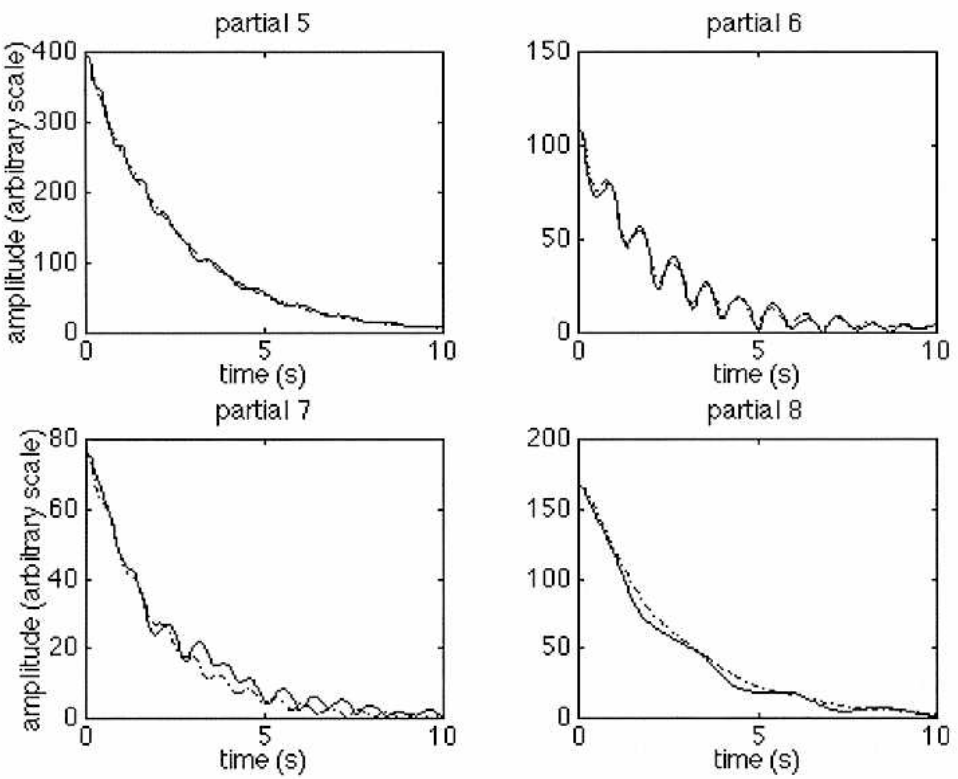


Fig. 14. Amplitude modulation laws from the fifth to the eighth partials for the plucked string. Original (solid line) and resynthesized (dotted line).



Fig. 15. Scale of the "piano-harp".

We can also put the system out of tune by changing the phase of only one of filter F_1 or F_2 . In this case, signal s_2 is much weaker than when the strings are tuned, and we can hear two distinct frequencies with beats. This result has a physical explanation: the fundamental frequencies of the two strings are distant, so the energy transfer ratio is extremely small. The partials, whose frequencies differ too much, are very weakly coupled. If the difference between the two frequencies is one octave, the coupling becomes optimal; the string excited by coupling vibrates with significant amplitude. The intensity of the coupling is then related to the number of partials sharing the same frequency. Swapping filters F_1 and F_2 does not modify the features of the produced signal: those filters describe the internal loss phenomena in the two strings, which are supposed to be identical. The coupling is mainly associated to filters C_1 and C_2 . Other parameters such as the excitation or the coefficient of inharmonicity (by acting on the phase of filters F_1 and F_2) can be changed to simulate other physical situations.

Such transformations offer several musical applications. For instance, one can make a "piano-harp" where each note excites two strings at a time; one whose frequencies increase by half tones (the plucking string) and another whose frequencies increase by tones (the string excited by coupling). Thus, each key corresponds to frequency doublets where for the first note of the scale the frequencies are the same, and for the last note of the scale the frequencies differ by one octave (Figure 15).

The coupling varies along this scale. As the timbre is related to the coupling phenomena, each note has its own timbre. This virtual piano-harp cannot be physically built. Indeed, the frequency difference between the strings leads to differences in tension, which could cause mechanical imbalance in the structure. Moreover, with this model, it is possible to separate the sound from the two strings (the string directly excited and the string excited by coupling).

6. Conclusion

This study shows that a coupled digital waveguide synthesis model is able to reproduce the perceptive effects of coupling between two piano strings. By generalizing the work done in the case of a single string with two polarizations to the case of two strings, we could determine the parameters of the model directly from the analysis of real sounds. For that purpose, we used a calibrated experimental setup. From a mechanical point of view, we have seen that the behavior of the coupling filters can be linked to the eigen modes of

the bridge. From a musical point of view, the accuracy of the resynthesized sounds validates the use of this model and the technique of parameter estimation. Although we worked on velocity signals from a specific experiment, the model in itself is valid in the case of real piano tones. Sound synthesis using this model makes it possible, first of all, to easily transpose the sound and create *ad infinitum* new sounds by simply modifying the relevant parameters of the filters, which were estimated from the analysis. These new sounds can, for instance, correspond to simulations of systems of two strings with completely different physical properties (for example, one can virtually couple a nylon string of guitar and a steel string of piano).

Our model can be generalized to the case of three coupled strings, and models for hammer excitation (Boutillon, 1988) and sound radiation by soundboard (Van Duyne & Smith, 1993) will also be included in future work. This will lead to a complete physical model of a piano, hopefully simple enough to be played in real-time on standard computing devices.

7. Acknowledgements

Julien Bensa thanks the "Région Provence-Alpes Côte d'Azur" and the firm "GENESIS" located in Aix-en-Provence (France) for supporting part of this work.

References

- Askenfelt, A. (1990). *Five lectures on The Acoustics of the Piano*. Publications issued by the Royal Swedish Academy of Music N°64. Stockholm: Kungl. Musikaliska Akademien.
- Boutillon, X. (1988). Model for piano hammers: Experimental determination and digital simulation. *Journal of Acoustical Society of America*, 83, 746–754.
- Boutillon, X. (1990). Le piano: modélisation physique et développements technologiques. *Colloque de Physique 1990*, supplément au n°2, 51.
- Daudet, L., Guillemain, Ph., & Kronland-Martinet, R. (1999). Resynthesis of piano strings vibrations based on physical modeling. In *Proceedings of the International Computer Music Conference 1999* (pp. 48–51). Beijing: International Computer Music Association.
- Fletcher, H., Blackham, E.D., & Stratton, R. (1962). Quality of piano tones. *Journal of Acoustical Society of America*, 34, 749–761.
- Guillemain, Ph., Kronland-Martinet, R., & Ystad, S. (1997). Physical modeling based on the analysis of natural sounds.

- In *Proceedings of Institute of Acoustics 1997*, 19, (pp. 445–450).
- Jaffe, D. & Smith III, Julius O. (1983). Extensions of the Karplus-Strong plucked string algorithm. *Computer Music Journal*, 7, 56–69.
- Karjalainen, M., Välimäki, V., & Tolonen, T. (1998). Plucked-string models: from the Karplus-Strong algorithm to digital waveguides and beyond. *Computer Music Journal*, 22, 17–32.
- Karplus, K. & Strong, A. (1983). Digital synthesis of plucked string and drum timbres. *Computer Music Journal*, 7, 43–55.
- Smith III, Julius O. (1987). Music applications of digital waveguides. *Technical Report STAN-M-39*. Center for Computer Research in Music and Acoustics, Stanford University, California.
- Smith III, Julius O. (1992). Physical modeling using digital waveguides. *Computer Music Journal*, 16, 74–87.
- Smith III, Julius O. (1993). Efficient synthesis of stringed musical instruments. In *Proceedings of the International Computer Music Conference 1993* (pp. 64–71). Tokyo: International Computer Music Association.
- Smith III, Julius O. (1995). Digital waveguide models for sound synthesis based on musical acoustics. In *Proceedings of International Congress of Acoustics 1995*, Vol. 3, (pp. 525–528). Trondheim: International Commission of Acoustics.
- Steiglitz, K. & McBride, L. E. (1965). A technique for the identification of linear systems. *Institute of Electrical and Electronics Engineers, Trans. Automatic Control AC-10*, 461–464.
- Valette, C. & Cuesta, C. (1993). *Mécanique de la corde vibrante. Traité des nouvelles technologies. Série Mécanique*, ed. Hermès.
- Välimäki, V., Huopaniemi, J., Karjalainen, M., & Jánosy, Z. (1996). Physical modeling of plucked string instruments with application to real time sound synthesis. *Journal of Audio Engineering Society*, 4, 331–353.
- Van Duyne, S. & Smith III, Julius O. (1993). Physical modeling with the 2D digital waveguide mesh. In *Proceedings of the International Computer Music Conference 1993* (pp. 40–47). Tokyo: International Computer Music Association.
- Weinreich, G. (1977). Coupled piano strings. *Journal of Acoustical Society of America*, 62, 1474–1484.
- Ystad, S. (1997). Simulation of the response of a wind instrument by a waveguide synthesis model. In *Proceedings of the 4th French Congress on Acoustics 1997*, Vol 1 (pp. 581–584). Marseille: Société Française d'Acoustique.

Appendix

Appendix A: Extraction of the average frequency from the analytic signal

Let f be a real function. Its analytic part \tilde{f} is extracted from the following relation:

$$\tilde{f} = (1 + iH)f$$

where H denotes the Hilbert transform operator. Let us consider the function defined by $g(t) = \text{Im}[\ln \tilde{f}(t)]$. The average

frequency of f is then defined as the mean value over time of the derivative $\left\langle \frac{d}{dt} g(t) \right\rangle$.

For instance, let us consider the function $f(t) = A(t)\cos(\omega t)$ where $A(t)$ is a slowly varying envelope. In this case, its analytic part is written $\tilde{f}(t) \approx A(t)e^{i\omega t}$ and thus

$g(t) = \text{Im}[\ln \tilde{f}(t)] \approx \omega t$. The derivative of g gives the average frequency ω . If $f(t) = A[\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)]$, this calculation gives $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ as the average frequency.

Annexe D

Caractérisation des produits collés à base de bois par l'analyse des vibrations dans le domaine acoustique

M. Aramaki, L. Brancheriau, H. Baillères, Ph. Guillemain, R. Kronland-Martinet, J.-D. Lanvin

Présenté au : 5ième Congrès des Sciences et Industries du bois, Nantes, France (mai 2000).

Références : [\[5\]](#) [\[6\]](#)

Caractérisation des produits collés à base de bois par l'analyse des vibrations dans le domaine acoustique

Loïc BRANCHERIAU¹, CIRAD-Forêt Montpellier
Mitsuko ARAMAKI², CNRS-LMA Marseille
Henri Baillères¹, CIRAD-Forêt Montpellier
Philippe Guillemain², CNRS-LMA Marseille
Richard Kronland², CNRS-LMA Marseille
Jean Denis Lanvin³, CTBA-Pôle Construction Bordeaux

Résumé

Compte tenu de la diversité et de la grande variabilité des produits à base de bois, induites soit par la fabrication, soit par la matière première il est nécessaire de tendre vers un classement rigoureux et souvent au cas par cas des performances et de la qualité. Ce classement permet d'optimiser la production et de mieux valoriser les produits.

Afin d'apporter des solutions à cet impératif, le CIRAD-Forêt, le CTBA-Pôle construction, et le CNRS-LMA, ont mis en commun leurs moyens et leurs compétences respectifs. L'objectif est d'imaginer un système de mesure qui puisse répondre à deux questions de première importance : Peut-on mesurer directement de manière non destructive et fiable des caractéristiques mécaniques importantes pour une utilisation en structure ? Est-il possible de détecter et de quantifier le ou les défauts d'une pièce afin de pouvoir contrôler et évaluer efficacement la production ?

La dernière question sous-entend deux principes distincts. D'une part, il s'agit de détecter, rapidement et très tôt dans la chaîne de production, les pièces défectueuses afin de pouvoir optimiser les processus de fabrication et de pouvoir garantir des spécifications strictes. D'autre part, d'attribuer de manière fiable, et pour chaque pièce, des qualités mécaniques répondant à des standards (ou des cahiers des charges) bien définis dès lors que les produits manufacturés ont une vocation structurelle. Cette évaluation peut intervenir à la sortie des chaînes de fabrication ou avant la mise en œuvre des produits.

Cette étude met en évidence la faisabilité de l'utilisation de l'analyse des vibrations dans le domaine acoustique appliqué à la caractérisation des assemblages collés dans les produits bois finis ou semi-finis. Nous nous intéresserons plus particulièrement

aux panneaux dérivés du bois, ainsi qu'au collage par aboutage.

La méthode proposée est une réponse relativement simple, efficace et peu onéreuse aux besoins des divers types de fabrication. Sa ligne directrice est constituée des principes fondamentaux de la mécanique vibratoire dans le domaine acoustique (connu depuis des décennies), complétés par l'utilisation des modèles de synthèse des sons musicaux. C'est en cela que réside l'originalité de la méthode.

Mots clefs : Assemblages collés, C.N.D., Vibrations, Synthèse sonore, Bois

Introduction

Le développement des techniques de collage contribue à optimiser l'utilisation du bois en valorisant une partie de la production difficilement utilisable en l'état comme par exemple les grumes mal conformées ou les déchets de scierie. La production de bois massifs reconstitués et de panneaux à base de bois permet de plus d'obtenir un matériau stable et homogène. Afin d'intégrer d'avantage les produits bois dans des réalisations haut de gamme, il est nécessaire d'effectuer un classement au cas par cas des performances et de la qualité. Nous proposons ici l'utilisation de l'analyse des vibrations dans le domaine acoustique comme méthode de contrôle non destructive des assemblages collés dans les produits bois. La première partie a pour objet la caractérisation des panneaux à base de bois par la méthode dynamique. Les résultats ainsi obtenus sont comparés avec ceux des méthodes normalisées. La deuxième partie met l'accent sur la qualité du collage des pièces de bois aboutées. Trois types d'aboutage sont examinés : l'aboutage simple, à enture simple, puis à entures multiples. Une nouvelle approche théorique, basée sur l'utilisation des modèles de synthèse des sons

¹ CIRAD-Forêt – TA 10/16 - Avenue Agropolis - 34398 Montpellier cedex 5 - France

² CNRS-Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique - Equipe Modélisation, Synthèse et Contrôle des Signaux Sonores et Musicaux - 31, chemin Joseph Aiguier - 13402 Marseille cedex 20 - France

³ CTBA - Pôle construction – Allée de Boutaut – BP 227 – 33028 Bordeaux cedex - France

musicaux, est présentée. Il est important de remarquer que la méthode d'analyse des vibrations n'est pas en soi un outil universel, mais doit être adaptée à des applications spécifiques.

1 Caractérisation des panneaux à base de bois : comparaison avec des essais normalisés

1.1 Mesure dynamique du module d'élasticité

La méthode de mesure utilise le principe de l'analyse spectrale des vibrations naturelles de flexion. Ce procédé permet de déterminer les fréquences propres d'une poutre à partir de sa réponse à une excitation impulsionnelle appliquée à une des extrémités de façon à solliciter simultanément tous les modes propres de vibration.

Ce dispositif conçu initialement pour des éprouvettes normalisées peut être utilisé pour des pièces couvrant une large gamme de dimensions. La méthode de détermination du module d'élasticité en flexion repose sur la recherche puis l'interprétation du spectre des fréquences propres issues des vibrations naturelles en appliquant la solution de Bordonné (1989) au modèle de Timoshenko (1921).

Equation du mouvement en vibrations transversales :

$$\text{Eq. 1 } E_X I_{Gz} \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - \rho S \left(1 + \frac{E_X}{K G_{XY}} \right) \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{r^2 I_{Gz}}{K G_{XY}} \frac{\partial^4 v}{\partial t^4} + \rho S \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0$$

avec v : déplacement vertical, t : variable temporelle, x : variable spatiale, E_X : module d'élasticité longitudinal, G_{XY} : module de cisaillement, K : coefficient de section réduite, I_{Gz} : moment d'inertie de la section droite, S : aire de la section droite, ρ : masse volumique.

La résolution de l'équation différentielle du mouvement proposée par Timoshenko (Eq. 1) conduit à chercher les solutions de l'équation aux fréquences (Eq. 2).

$$\text{Eq. 2 } \Delta = 0 \Leftrightarrow d_1 d_2 L^2 [1 - \cos(d_1 L) \cosh(d_2 L)] + [2a(X + X^2 S^2) - XR] \sin(d_1 L) \sinh(d_2 L) = 0$$

avec $a = \frac{I_{Gz}}{SL^2}$, $X = \frac{w^2 L^4 S r}{E_X I_{Gz}}$, $\Gamma = \frac{E_X I_{Gz}}{K S G_{XY} L^2}$ et

$$S = \frac{a - \Gamma}{2} \text{ et } R = \frac{a + \Gamma}{2}$$

L'équation aux fréquences, $F(X, \alpha, \Gamma) = 0$, n'a pas été résolue de façon exacte. Plusieurs solutions approchées ont été proposées, notamment par Bernoulli (1748), et Bordonné (1989).

L'élancement est supposé relativement faible. Le paramètre X est très voisin de la solution de Bernoulli X_n . Le cisaillement n'est plus négligé. L'influence des appuis est négligée. Les paramètres de l'équation (Eq. 2) deviennent alors $\{X \approx X_n \text{ solution de Bernoulli, } \alpha$

supposé petit, Γ supposé petit}. Les paramètres α et Γ étant supposés petits, la fonction $F(X, \alpha, \Gamma)$ peut s'écrire au voisinage de $(X_n, 0, 0)$ par la formule de Taylor-Lagrange au premier ordre (Goens, 1931).

Le développement de l'équation aux fréquences (Eq. 2) permet d'obtenir une solution simple, plus précise que celle de Bernoulli, prenant en compte l'effet du cisaillement (paramètre Γ). L'expression des fréquences de vibration s'écrit :

$$\text{Eq. 3 } f_n = \frac{1}{2p} \sqrt{\frac{E_X I_{Gz}}{r S} \frac{X_n}{L^4 \left[1 + a F_1(m) + a \frac{E_X}{K G_{XY}} F_2(m) \right]}}$$

Avec $F_1(m) = q^2(m) + 6q(m)$ et $F_2(m) = q^2(m) - 2q(m)$.

Les paramètres m , X_n , $F_1(m)$ et $F_2(m)$ se calculent en fonction de l'indice n , et sont utilisés pratiquement pour calculer la valeur du module E_X ainsi que celle du module de cisaillement G_{XY} . En séparant les termes dans (Eq. 3), on obtient :

$$\text{Eq. 4 } \frac{E_X}{r} - \frac{E_X}{K G_{XY}} \left[a F_2(m) 4p^2 \frac{SL^4}{I_{Gz}} \frac{f_n^2}{X_n} \right] = 4p^2 \frac{SL^4}{I_{Gz}} \frac{f_n^2}{X_n} [1 + a F_1(m)]$$

Les valeurs de E_X et G_{XY} se calculent en effectuant une régression linéaire (Figure 1) sur les couples (x, y) , dépendant de l'indice n , tels que :

$$\text{Eq. 5 } x = a F_2(m) 4p^2 \frac{SL^4}{I_{Gz}} \frac{f_n^2}{X_n} \text{ et } y = 4p^2 \frac{SL^4}{I_{Gz}} \frac{f_n^2}{X_n} [1 + a F_1(m)]$$

Le développement de l'équation aux fréquences par la formule de Taylor-Lagrange n'est applicable aux cinq premières fréquences de vibration que si l'élancement longitudinal est supérieur à dix (Bordonné, 1989).

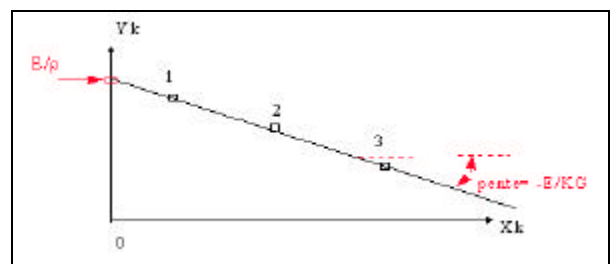


Figure 1 : Plan de régression linéaire.

L'élément de bois à tester repose sur deux supports élastiques afin que la propagation des vibrations soit la plus libre possible et puisse être provoquée par une simple percussion sur une des extrémités (Figure 2). A l'autre extrémité, un microphone enregistre les fréquences émises et les transmet via un filtre « passe-bas » à une carte d'acquisition sur micro-ordinateur pour une analyse par « transformée de Fourier rapide »

(F.F.T.). Le traitement mathématique du signal (calcul et régression linéaire) est effectué par un programme écrit en VisualBasic qui intègre les caractéristiques géométriques et le poids de l'éprouvette.

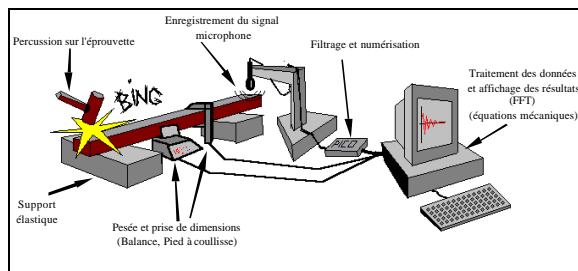


Figure 2 : Principe de la mesure du module d'élasticité dynamique.

Sur le plan expérimental, si le matériau répond en première approximation aux hypothèses de construction du modèle, c'est-à-dire principalement l'homogénéité des propriétés sur la longueur (peu ou pas de singularités) ainsi qu'un élancement longitudinal supérieur à dix, alors la mesure vibratoire est bien corrélée aux modules d'élasticité obtenus par la méthode statique de flexion 4 points d'après la norme NF B 51-016 (AFNOR, 1987). La Figure 3 illustre ce propos.

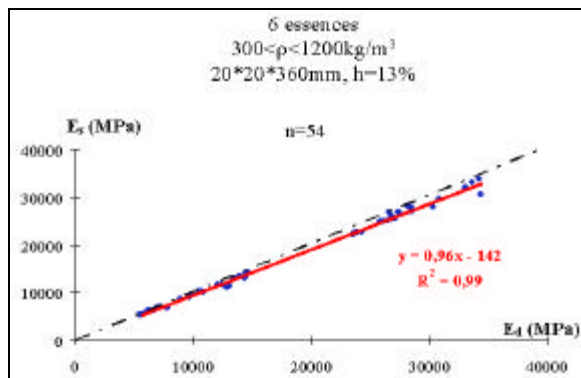


Figure 3 : Corrélation entre le module d'élasticité dynamique E_d (système BING) et le module d'élasticité statique E_s sur 6 essences tropicales (essai normalisé NF B 51-016) (Brancheriau, 1997).

1.2 Modules d'élasticité en flexion sur différents types de panneaux

Les mesures de module d'élasticité ont été réalisées en suivant les prescriptions de la norme EN 310 (AFNOR, 1993). L'essai normalisé est un essai de flexion trois points. Une charge est appliquée au milieu d'une éprouvette, prélevée dans le panneau, supportée par deux appuis (Figure 4). La valeur du module d'élasticité calculée est le module apparent, et non le module vrai, car l'effet du cisaillement dû à l'effort tranchant, ainsi que l'effet du poinçonnement des appuis ne sont pas pris en compte.

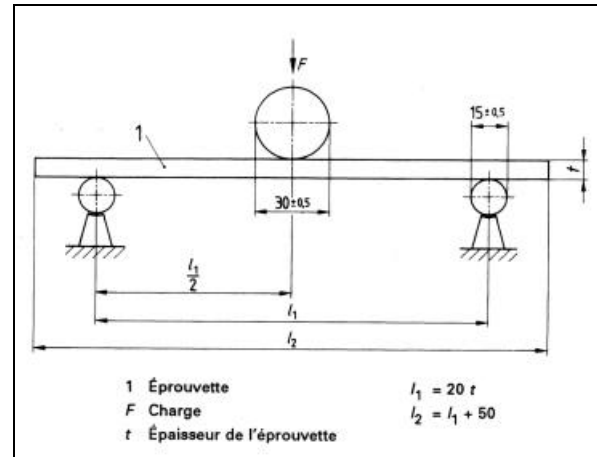


Figure 4 : Dispositif d'essai de flexion (EN 310).

La Figure 5 montre que les mesures de module d'élasticité réalisées sur différents types de panneaux sont bien corrélées aux modules d'élasticité dynamiques. Il est important de remarquer que les résultats expérimentaux en flexion statique font apparaître une différence d'environ 19 % entre le module apparent et le module de flexion 4 points (Brancheriau, 1997). L'essai de flexion 3 points sous estime systématiquement la grandeur mesurée (Sales, 1977 ; Perstorper, 1994). Cette sous estimation du module explique que la pente de l'ajustement soit de 1,24 et non voisine de l'unité (Figure 5).

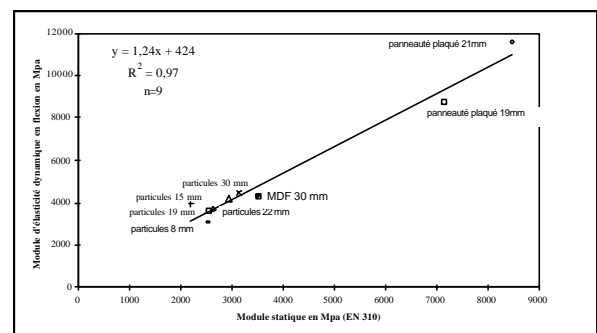


Figure 5 : Corrélation entre modules d'élasticité réalisés sur différents types de panneaux en suivant les prescriptions de norme (EN 310) et les modules d'élasticité dynamiques (moyennes de 6 échantillons par type de panneau).

1.3 Modules d'élasticité en flexion, résistance à la rupture, et cohésion interne sur panneaux de particules

Des essais ont été réalisés sur des panneaux de particules (10 mm d'épaisseur) extraits de la chaîne de production de la société EGGER-ROL. Les caractéristiques importantes à évaluer sont : le module d'élasticité en flexion et la résistance à la rupture selon la norme EN 310 (AFNOR, 1993), et la résistance à la traction perpendiculaire aux faces du panneau, dite

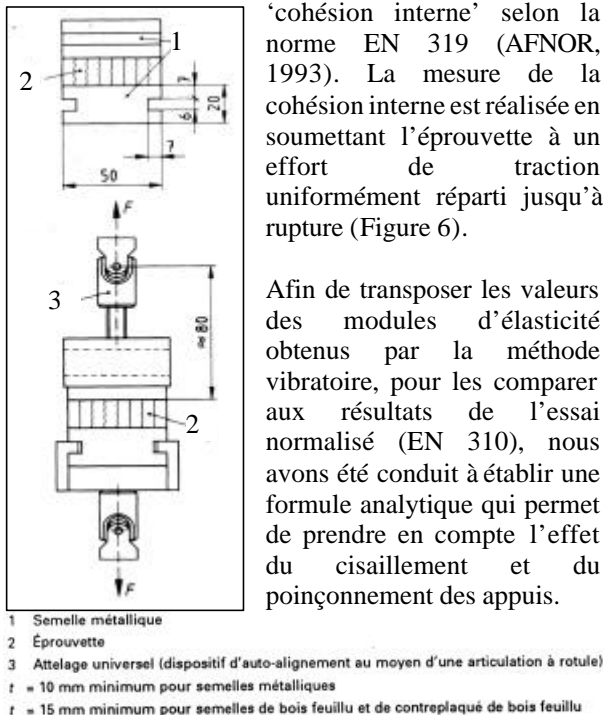


Figure 6 : Dispositif d'essai de détermination de la cohésion interne (AFNOR, 1993).

l'effet du cisaillement et du poinçonnement des appuis viennent en effet perturber la mesure du module d'élasticité dans le cas de l'essai de flexion trois points.

La formule analytique de passage du module d'élasticité 3 points à celui obtenu en flexion 4 points (Eq. 6) donne des résultats vérifiés par l'expérience sur des éprouvettes de bois massif en suivant la norme NF B 51 016 (1987). Les sous-estimations, auxquelles conduisait en pratique l'essai de flexion 3 points lorsque les effets de cisaillement et de poinçonnement des appuis étaient négligés, se chiffrent à respectivement 8% et 11%. L'écart relatif entre ces deux essais de flexion n'est cependant pas constant en fonction de la densité. La formule de passage proposée ci-dessous tient compte de ce phénomène par l'estimation des grandeurs mécaniques en fonction de la densité. (Brancheriau, 1997).

$$\text{Eq. 6 } E_{L4} = \frac{1,045}{1 - 1,90K_p \left(E_{L3} \frac{eh^3}{l^3} \right)^{2/3} - \frac{E_{L3}}{G} \frac{h^2}{l^2}} E_{L3}$$

avec : e largeur
h hauteur
l distance entre les deux appuis
d masse volumique
R rayon du rouleau central
E_L module d'élasticité longitudinal
G module de cisaillement
K_p coefficient de poinçonnement
E_c module d'élasticité dans le sens de l'application de l'effort de chargement

Pour un appui cylindrique de rayon quelconque :

$$\text{Eq. 7 } K_p = 0,515 \left(\frac{h}{e \sqrt{R} E_c} \right)^{2/3}$$

Dans un premier temps nous avons étudié les corrélations entre les mesures statiques et les mesures dynamiques sur des échantillons de petites dimensions égales aux dimensions normalisées. Les corrélations sont très correctes malgré l'incertitude liée à la valeur obtenue par un essai de flexion 3 points (Figure 7 et Figure 8).

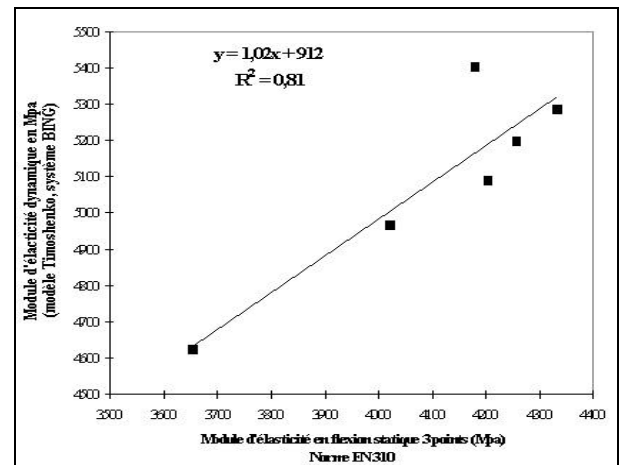


Figure 7 : Corrélations entre module dynamiques (non corrigé) et module statique (EN 310) sur des éprouvettes normalisées de panneaux de particules (10 mm). Les éprouvettes sont prélevées dans le sens de la longueur du panneau (sortie de la presse).

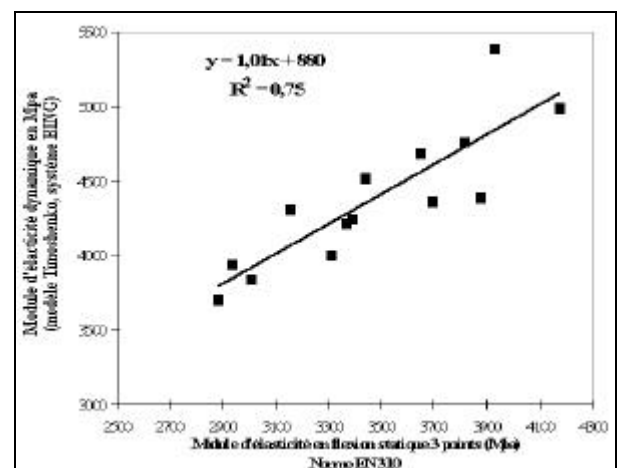


Figure 8 : Corrélations entre module dynamiques (non corrigé) et module statique (EN 310) sur des éprouvettes normalisées de panneaux de particules (10 mm). Les éprouvettes sont prélevées perpendiculairement au sens de la longueur du panneau (sortie de la presse).

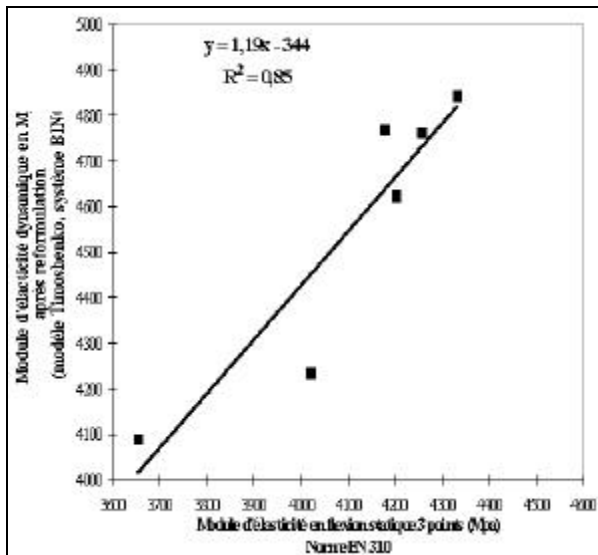


Figure 9 : Corrélations entre module dynamique corrigé et module statique (EN 310) sur des éprouvettes normalisées de panneaux de particules (10 mm). Les éprouvettes sont prélevées dans le sens de la longueur du panneau (sortie de la presse).

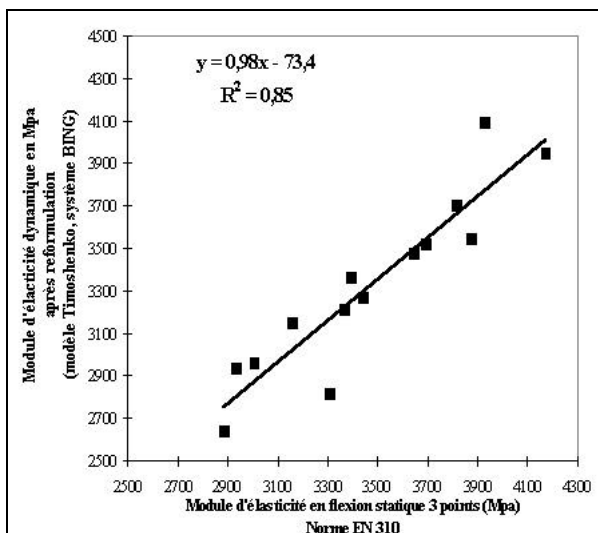


Figure 10 : Corrélations entre module dynamique corrigé et module statique (EN 310) sur des éprouvettes normalisées de panneaux de particules (10 mm). Les éprouvettes sont prélevées perpendiculairement au sens de la longueur du panneau (sortie de la presse).

Lorsque les modules dynamiques sont corrigés par l'équation (Eq. 6) alors les corrélations s'améliorent significativement (Figure 9 et Figure 10). Les valeurs dynamiques pourraient être utilisées directement si la valeur du module E_c dans la formule de passage (Eq. 6) est connue précisément. Comme le prouve la Figure 11 la prédiction de la résistance à la rupture par le module dynamique est également très intéressante.

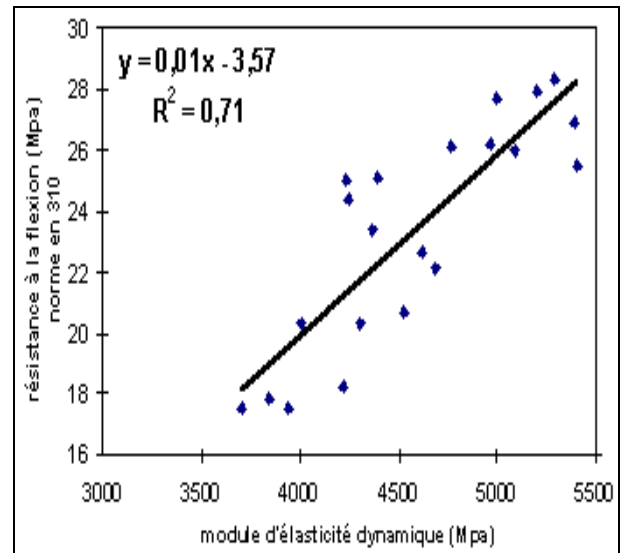


Figure 11 : Corrélation entre module dynamique et la résistance à la rupture (EN 310) sur des éprouvettes normalisées de panneaux de particules (10 mm).

La moyenne des modules d'élasticité dynamiques est également bien corrélée au module d'élasticité dynamique en compression (Figure 12) mesuré sur une plaque (10 x 50 x 200 cm).

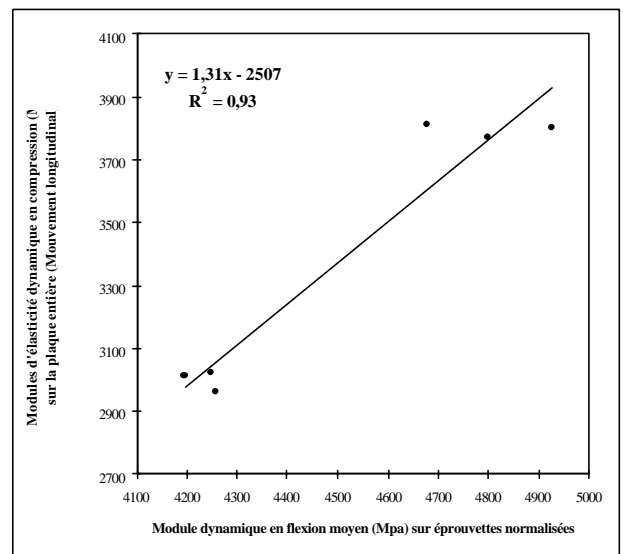


Figure 12 : Corrélation entre module dynamique moyen d'une plaque (10 x 50 x 200 cm) et le module dynamique mesuré sur la plaque entière (Bernoulli).

Une autre caractéristique importante pour le fabricant est la traction perpendiculaire aux faces du panneau, dite « cohésion interne » selon la norme EN 319 (AFNOR, 1993). Cette caractéristique est bien corrélée au module de cisaillement dynamique comme le prouve la Figure 13. Ceci constitue un moyen très intéressant de contrôler les panneaux au cours du processus de fabrication.

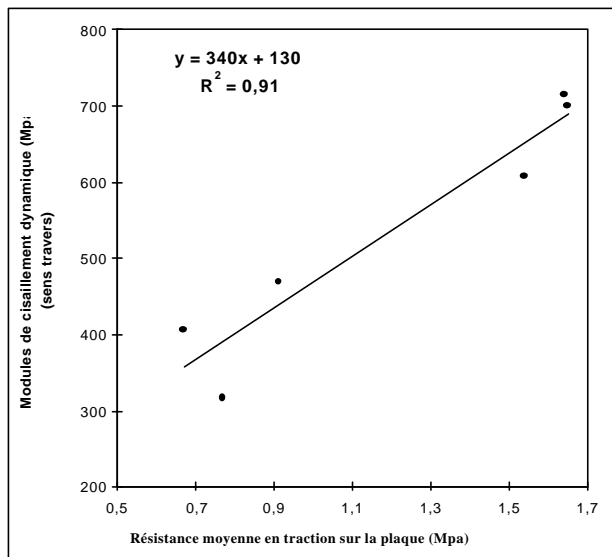


Figure 13 : Corrélation entre le module de cisaillement dynamique et la cohésion interne du panneau (EN 319).

On peut également noter que le module d'élasticité dynamique en compression constitue également un excellent indicateur de la cohésion interne (Figure 14).

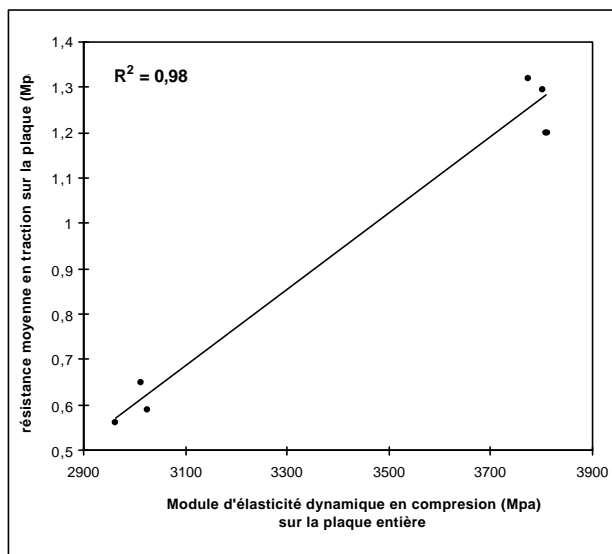


Figure 14 : Corrélation entre le module d'élasticité dynamique en compression mesurée sur une plaque entière (10 x 50 x 200 cm) et la cohésion interne moyenne du panneau (EN 319).

Les résultats expérimentaux que nous venons d'exposer montrent que la mesure des modules d'élasticité par la méthode vibratoire, à condition de maîtriser la chaîne de mesure et les modèles utilisés, peut être exploitée pour mesurer les caractéristiques élastiques des panneaux à base de bois. Par ailleurs, par un choix judicieux de paramètres dynamiques obtenus lors de l'essai vibratoire, il est possible d'obtenir une

excellente prédiction de certains paramètres importants pour le contrôle et le classement des produits comme par exemple la cohésion interne des panneaux de particules.

2 Caractérisation de la qualité du collage de pièces de bois massives aboutées

2.1 Présentation de la synthèse musicale

Parmi les champs d'investigation de la discipline scientifique appelée "Informatique Musicale", la synthèse sonore occupe une place importante. Elle a pour objectif la production par des dispositifs électroniques et informatiques de sons musicalement pertinents. On en arrive naturellement à la notion d'analyse-synthèse dont l'objectif est le développement de techniques de traitement du signal permettant, à partir de l'analyse d'un son naturel, d'en déduire les valeurs des paramètres intervenant dans un modèle de synthèse donné. On parle alors de modélisation sonore dont le but est la reproduction parfaite d'un point de vue perceptif de sons musicaux tout en permettant à ceux-ci de bénéficier de la malléabilité propre à la synthèse pure.

Une telle modélisation nécessite généralement d'employer des techniques de traitement du signal sophistiquées basées sur les représentations temps - fréquence. En plus de fournir un ensemble de données susceptibles de permettre une re-synthèse parfaite d'un son donné, une telle modélisation sonore permet d'obtenir des informations caractéristiques du signal considéré puisque les paramètres estimés sont caractéristiques de la structure intime du son. (Ystad, 1998).

2.2 Les modèles propagatifs en synthèse des sons musicaux

Suivant le type de modèle de synthèse choisi, les informations caractéristiques du signal peuvent être directement reliées à la géométrie et aux propriétés mécaniques du système physique qui a engendré le son. Plus que de modèle de synthèse sonore, on parle alors de modèles physiques ou modèles propagatifs. Ceux-ci, bien que n'étant généralement pas issus directement des équations de la mécanique qui régissent le comportement dynamique d'un système vibratoire, prennent en compte les caractéristiques physiques principales qui donnent naissance au son. En effet, dans ces modèles, le calcul du son engendré par un système mécanique complexe n'est pas obtenu par résolution des équations différentielles qui régissent son mouvement mais on considère celui-ci comme issu de la propagation d'une onde dans un milieu borné que l'on appelle le résonateur. La pression acoustique dans un tuyau dans le cas des bois ou des cuivres, les vibrations des cordes dans le cas d'instruments à cordes sont deux exemples respectivement d'ondes de

compression et de flexion dans des matériaux élastiques de dimension finie.

D'un point de vue traitement du signal, la propagation d'une onde d'un point à un autre d'un matériau peut être représentée sous forme d'un filtre linéaire. Ce filtre exprime sous forme d'un retard le temps que met l'onde pour parcourir un trajet donné et prend également en compte les transformations que l'onde est susceptible de subir au cours de sa propagation, à savoir la dissipation qui tient compte de l'absorption par le matériau d'une partie de l'énergie de l'onde, et la dispersion qui exprime le fait que toutes les fréquences peuvent ne pas se propager à la même célérité. Ces deux quantités sont généralement dépendantes de la fréquence, d'où l'utilisation de filtres linéaires. Dans un milieu de propagation borné, l'onde subit des réflexions aux extrémités. Le modèle prend donc en compte ces va et viens successifs en réinjectant à son entrée une partie du signal de sortie. Aussi bien dans le cas du modèle que dans le cas physique, on comprend bien que le système total donne lieu à la création d'un système d'ondes stationnaires engendrant dans le domaine temporel un phénomène périodique ou pseudo-périodique que l'on peut représenter sous forme de modes, dont les caractéristiques sont directement reliées au milieu de propagation. En particulier, on peut montrer que la fréquence fondamentale de vibration est liée à la célérité de propagation et à la longueur du milieu, que l'amortissement des modes est lié à la dissipation, et que leur non harmonicité est liée à la dispersion. (Smith, 1992).

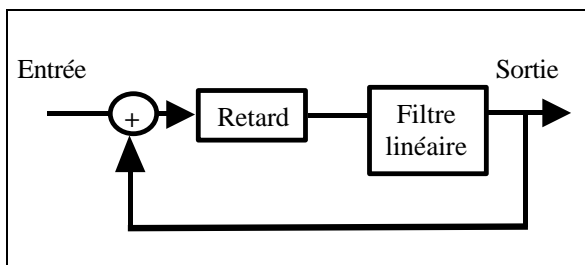


Figure 15 : Modèle propagatif élémentaire.

La Figure 15 représente un modèle propagatif élémentaire. L'élément nommé "Retard" représente la durée de propagation d'une extrémité à l'autre du milieu. L'élément nommé "Filtre linéaire" est le filtre linéaire modélisant les transformations subies par l'onde au cours de sa propagation. (Karjalainen, Välimäki et Tolonen, 1998).

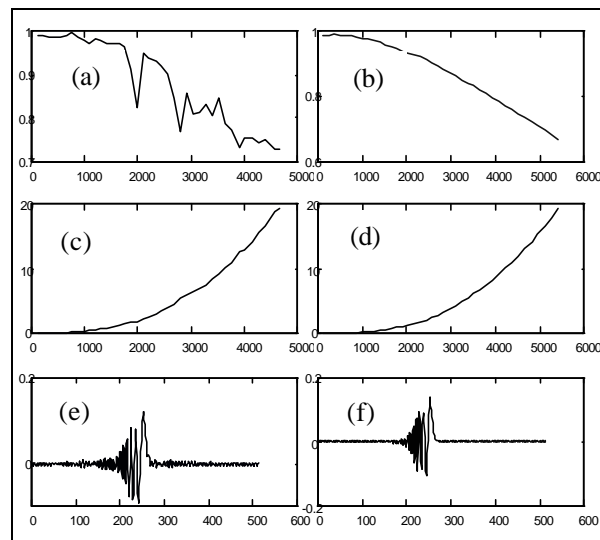


Figure 16 : Filtres décrivant la propagation d'une vibration (Guillemain, Kronland-Martinet et Ystad, 1997). Module du filtre linéaire caractérisant la dissipation de l'onde fonction de la fréquence, données expérimentales (a) et analytiques (b). Retard de groupe du filtre linéaire caractérisant la dispersion de l'onde en fonction de la fréquence, données expérimentales (c) et analytiques (d). Réponse impulsionnelle du filtre linéaire fonction du temps, données expérimentales (e) et analytiques (f).

La Figure 16 représente les filtres décrivant la propagation d'une vibration transverse d'une extrémité à l'autre d'une corde de guitare obtenus par analyse d'un son réel (à gauche) et par calcul à partir des équations de la mécanique (à droite). De haut en bas : densité spectrale (reliée à la dissipation), retard de groupe (relié à la dispersion) et réponse impulsionnelle.

2.3 Application à la vibration transversale des poutres

Dans le cas des structures à une seule dimension, ces filtres peuvent être directement déduits des équations de la mécanique mais plus important, ils peuvent être estimés à partir de l'analyse de signaux réels.

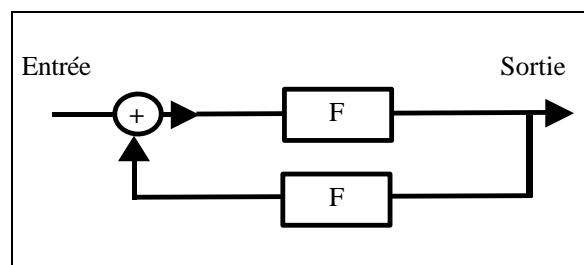


Figure 17 : Modèle propagatif modélisant la vibration d'une poutre.

Afin de se placer dans le cadre des hypothèses de l'élasticité linéaire pure, nous supposons que le

matériau n'est ni dissipatif, ni dispersif. Nous choisirons le modèle propagatif représenté à la Figure 17. La fonction de transfert du modèle s'écrit :

$$\text{Eq. 8 } T(\omega) = \frac{F(\omega)}{1 - F(\omega)^2} = \frac{\exp(-i\omega D)}{1 - \exp(-i2\omega D)}$$

Où D représente ici la durée de propagation d'une extrémité à l'autre du milieu. La fonction de transfert (Eq. 8) ainsi définie engendre des résonances de pulsation ω_n comme le montre la Figure 18.

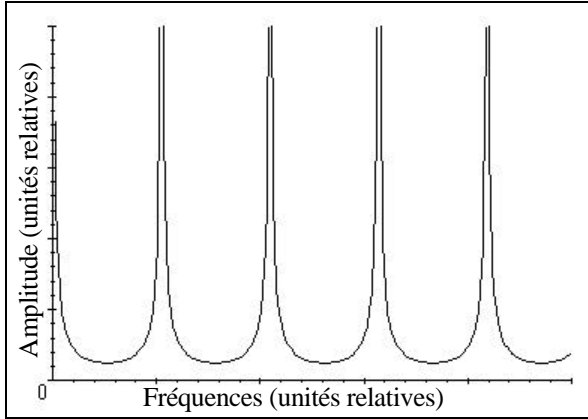


Figure 18 : Spectre fréquentiel du modèle propagatif.

L'équation du mouvement proposée par Bernoulli (1748) s'écrit :

$$\text{Eq. 9 } E_X I_{Gz} \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + rS \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0$$

En cherchant les solutions de (Eq. 9) sous la forme d'une onde sinusoïdale progressive de la forme $v(x,t) = \exp(i\omega t - kx)$, on obtient :

$$\text{Eq. 10 } k = \sqrt[4]{\frac{rS}{E_X I_{Gz}}} \sqrt{\omega}$$

Le filtre $F(\omega)$ de l'équation (Eq. 8) peut se mettre sous la forme :

$$\text{Eq. 11 } F(\omega) = \exp(-ikL)$$

Le module de la fonction de transfert (Eq. 8) s'écrit alors :

$$\text{Eq. 12 } |T(\omega)| = \frac{1}{2 \sin(kL)}$$

L'expression des pulsations propres du système se déduit de l'équation (Eq. 12) :

$$\text{Eq. 13 } k(\omega_n)L = (2n+1)\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{E_X I_{Gz}}{rS} \frac{X_n}{L^4}}$$

Avec $X_n = [(2n+1)\pi/2]^4$. On retrouve ainsi très simplement l'expression des fréquences de vibration d'après l'équation de Bernoulli (1748).

L'utilisation de l'équation du mouvement proposée par Timoshenko (1921) est également simple à mettre en œuvre. On obtient les résultats suivant :

$$\text{Eq. 14 } k = \sqrt{\frac{r\omega}{2E_X}} \sqrt{\omega^2 \left(1 + \frac{E_X}{KG_{XY}}\right)^2 - 4 \left(\frac{E_X}{KG_{XY}} \omega^2 - \frac{E_X S}{I_{Gz}}\right) + \omega^2 \left(1 + \frac{E_X}{KG_{XY}}\right)}$$

Cette nouvelle expression de k implique que les pulsations propres du système ω_n soient solution de l'équation :

$$\text{Eq. 15 } k(\omega_n) = (2n+1) \frac{\pi}{2L}$$

Afin de confronter les équations (Eq. 14) et (Eq. 15) avec l'expérience, des essais dynamiques ont été réalisés sur 23 petites éprouvettes de bois sans défaut. L'essence choisie est l'ébène verte (*Tabebuia spp.*) de densité moyenne $d_{12} = 1,10 \text{ g/cm}^3$. Les éprouvettes ont pour dimensions 20x20x400 mm. L'essai dynamique réalisé est décrit au paragraphe 1.1, les trois premières fréquences de vibration de flexion, le module d'élasticité longitudinal, et le module de cisaillement sont ainsi mesurés. Ces valeurs ont été utilisées dans l'équation (Eq. 14), ce qui a permis de vérifier expérimentalement l'équation (Eq. 15). Le Tableau 1 montre les écarts obtenus entre le premier et le second membre de l'équation (Eq. 15).

Effectif 23	Ecart relatif (%)		
	n=1	n=2	n=3
Moyenne	-1,2	-1,0	-1,4
Ecart type	0,1	0,4	0,2

Tableau 1 : Ecart relatif entre la valeur de $k(\omega_n)$ calculée d'après des données expérimentales et le second membre de l'équation (Eq. 15).

2.4 Les modèles propagatifs pour la représentation de poutres unidimensionnelles comportant une interface

Dans de nombreux cas, cette représentation simpliste d'un résonateur d'instrument de musique sous la forme d'un unique modèle propagatif est insuffisante. Par exemple, dans le cas du piano, ce sont environ deux cents cordes qui sont couplées entre elles et sont susceptibles d'échanger de l'énergie. Ce problème a amené les chercheurs du domaine à mettre au point des modèles propagatifs couplés dont le rôle est de modéliser non seulement les phénomènes propagatifs au sein de chaque résonateur mais également la façon dont ils interagissent.

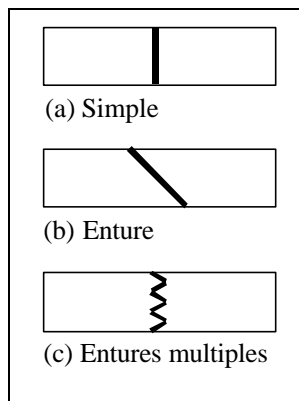


Figure 19: Exemple de configurations de joints utilisés en assemblage structural.

D'un point de vue phénoménologique, cette description des mécanismes de couplage reste applicable au cas de pièces de bois massives aboutées. Parmi les configurations de joints couramment utilisées en structure, nous nous intéresserons ici aux configurations (a), (b) et (c) de la Figure 19.

Le joint de colle peut être assimilé à un ensemble interface - milieu de propagation. Interface qui provoque d'une part l'entretien d'ondes stationnaires dans un milieu grâce à ses capacités réfléchissantes et d'autre part le transfert d'une partie de l'énergie de l'onde vers un deuxième milieu grâce à ses capacités de transmission. Dans le cas des modèles propagatifs couplés, le joint de colle ou l'interface est représenté par un ensemble de filtres linéaires.

Un premier filtre linéaire modélise la réflexion et prend en considération l'impédance non infinie au niveau de l'interface. Un filtre modélise ensuite la propagation de l'onde au sein de l'interface, et enfin un filtre matérialise le passage entre l'interface et le deuxième milieu de propagation sous la forme d'une impédance non infinie (Figure 20).

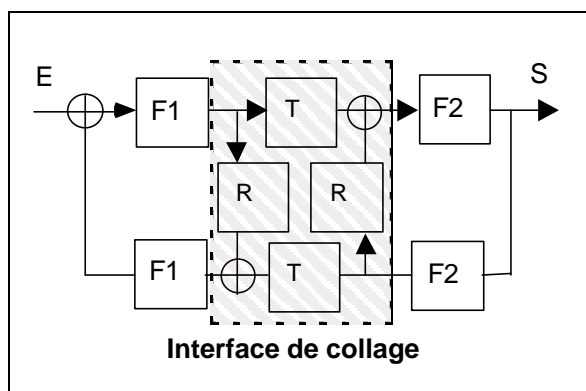


Figure 20: Modèle propagatif entre deux milieux séparés par une interface.

Le couplage est représenté la encore sous forme de filtres linéaires qui prennent en compte la réflexion de l'onde aux interfaces entre les différents milieux de propagation et sa transmission d'un milieu à un autre. (Aramaki, 1999).

La Figure 20 représente un modèle propagatif prenant en compte une interface et un couplage entre deux milieux. Les filtres F1 et F2 décrivent la propagation respectivement dans chaque milieu (1) et (2). Ici, ils intègrent à la fois le temps de propagation et les phénomènes de dissipation et dispersion. Les filtres R modélisent la réflexion des ondes aux interfaces. Les filtres T modélisent la transmission des ondes d'un milieu à l'autre.

2.5 Mise en œuvre pratique des modèles propagatifs couplés

La grande simplicité de ces modèles les rend à la fois faciles à implémenter numériquement et efficaces d'un point de vue calculatoire, aussi bien dans le domaine fréquentiel que dans le domaine temporel. Ceci les rend a priori bien appropriés à la simulation du comportement vibratoire de milieux unidimensionnels présentant une interface de colle.

Afin de vérifier cette hypothèse, nous nous sommes intéressés aux vibrations libres de 6 petites éprouvettes de bois sans défaut. L'essence choisie est l'ébène verte (*Tabebuia spp.*) de densité moyenne $d_{12}=1,10 \text{ g/cm}^3$. Les éprouvettes ont pour dimensions 20x20x395 mm. Deux éprouvettes sont façonnées puis collées selon chacune des trois configurations décrites à la Figure 19. Pour chaque type d'aboutage, une éprouvette est bien encollée, l'autre ne comportant que très peu de colle au niveau de l'interface. L'essai dynamique réalisé est décrit au paragraphe 1.1, les cinq premières fréquences de vibration de flexion sont ainsi mesurées.

Les signaux sonores permettent d'extraire la valeur du coefficient de réflexion de l'interface de collage pour chaque éprouvette (Figure 21).

Type d'aboutage	Type de collage	Coefficient de réflexion R
Simple	Bon	1,27
	Partiel	*
Enture	Bon	1,06
	Partiel	1,14
Enture multiple	Bon	1,07
	partiel	1,19

Figure 21: Coefficient de réflexion des interfaces de collage pour trois types d'aboutage.

Les paramètres du modèle, notamment dispersion et dissipation, ont été adaptés afin de reproduire au mieux les positions et largeurs des raies spectrales des signaux expérimentaux. La réponse sonore de l'éprouvette à aboutage simple n'a pas pu être exploitée du fait d'un mauvais enregistrement (Figure 21). Concernant les deux autres types d'aboutage, on remarque que le coefficient de réflexion d'un aboutage à collage partiel est supérieur à celui d'un aboutage bien encollé. Plus le collage sera parfait et moins l'interface sera réflexive. Cette exemple d'application illustre le fait qu'il est

possible de caractériser simplement l'interface de collage dans des bois aboutés en utilisant l'analyse des vibrations dans le domaine acoustique.

Conclusions et perspectives

Cette étude met en évidence la faisabilité de l'utilisation de l'analyse des vibrations dans le domaine acoustique appliqué au contrôle non destructif des produits collés à base de bois. Il convient de souligner, qu'au regard du problème initial, la méthode s'applique non seulement à la qualification des performances mécaniques mais aussi à la qualification qualitative des produits.

Les résultats expérimentaux sur les panneaux à base de bois montrent qu'il est possible d'obtenir une excellente prédiction de certains paramètres importants, comme par exemple la cohésion interne, pour le contrôle et le classement de ce type de produit.

Les potentialités de l'approche par modèles de synthèse des sons musicaux en vue de la caractérisation de l'interface de collage de pièces de bois massives aboutées ont été abordées. La validation de l'utilisation de ce type de modèles dans un contexte de contrôle non destructif nécessite maintenant de définir des processus d'analyse de signaux réels permettant d'estimer précisément les paramètres du modèle et donc de caractériser et de classer les interfaces de collage.

Il reste à mettre en place une étude plus vaste, appliquée au domaine industriel qui puissent réunir dans un seul et même outil les différents composants de la méthode proposée. Il va de soi que l'outil ne peut être universel mais pourra être dédié à des applications spécifiques pour lesquels le système s'adapte le mieux et est le plus efficace.

Bibliographie

AFNOR (1987) NF B 51-016, Détermination du module d'élasticité en flexion statique de petites éprouvettes sans défaut.

AFNOR (1993) NF EN 310, Panneaux à base de bois, détermination du module d'élasticité en flexion et de la résistance à la flexion.

AFNOR (1993) NF EN 319, Panneaux de particules et panneaux de fibres, détermination de la résistance à la traction perpendiculaire aux faces du panneau.

Aramaki, M. (1999) Etude et modélisation du couplage entre deux cordes vibrantes, application à la synthèse du piano. D.E.A. Mécanique. Marseille, Université d'Aix-Marseille II: 49.

Bernoulli, D. (1748) Réflexion et Eclaircissement sur les Nouvelles Vibrations des Cordes Exposées dans les

Mémoires de l'Académie. Royal Academy of Berlin: 1750.

Bordonné, P. A. (1989) Module Dynamique et Frottement Intérieur dans le Bois, Mesures sur Poutres Flottantes en Vibrations Naturelles. Institut National Polytechnique de Lorraine: 109.

Brancheriau, L. (1997) Etude des relations entre les caractéristiques mécaniques obtenues en flexion trois et quatre points. D.E.A., Université de Bordeaux I: 64.

Goens, E. (1931) Über die Bestimmung des Elastizitätsmoduls von Stäben mit Hilfe von Biegungsschwingungen. Ann. D. Phys. Ser 7, 11: 649-678.

Guillemain, P., Kronland-Martinet, R. and Ystad, S. (1997) Physical modelling based on the analysis of natural sounds. International Symposium on Musical Acoustics, Edinburgh. pp. 445-450.

Karjalainen, M., Välimäki, V. and Tolonen, T. (1998) Plucked-string models : from the Karplus-Strong algorithm to digital waveguides and beyond. Computer Music Journal 22, N°3: 17-32.

Perstorper, M. (1994) Strength and stiffness prediction of timber using conventional and dynamic methods. European symposium on non destructive evaluation of wood, Sopron university. pp. 321-330.

Sales, C. (1977) Etude rhéologique des bois tropicaux, le module d'élasticité. Bois et forêts des tropiques 176: 47-65.

Smith, J. O. (1992) Physical modeling using digital waveguides. Computer Music Journal 16, N°4: 74-87.

Timoshenko, S. (1921) On the Correction for Shear of the Differential Equation for Transverse Vibrations of Prismatic Bars. Philosophical Magazine and Journal of Science XLI - Sixth Series: 744-746.

Ystad, S. (1998) Sound modeling using a combination of physical and signal models. Acoustique, traitement du signal et informatique appliqués à la musique. Marseille, Université d'Aix-Marseille II: 130.

Annexe E

Synthèse de vibrations de structures bidimensionnelles à l'aide d'un modèle guide d'onde adapté par méthode d'optimisation

M. Aramaki, O. Gipouloux

Paru dans les actes du Congrès du réseau européen MOSART, Barcelone, Espagne (novembre 2001).

Référence : [7]

Sous le titre :

Synthesis of bi-dimensional structure vibrations using digital waveguides adapted by optimization technics

Résumé

Cet article présente une méthode de calage de modèles de synthèse présentés dans le chapitre 3 à l'aide de techniques d'optimisation. Ces modèles reproduisent les vibrations de structures simples, du type membranes et plaques minces. L'idée consiste à définir s'il est possible de simuler le son produit par une structure plus complexe avec un modèle de synthèse de structure plus simple (membrane ou plaque mince) dont les paramètres seraient judicieusement choisies. On pourrait alors déterminer une structure simple équivalente d'un point de vue perceptif qui serait plus facile à implémenter. En particulier, les paramètres des modèles de synthèse seront estimés par l'analyse de signaux obtenus expérimentalement et par une technique d'optimisation.

Synthesis Of Bi-Dimensional Structure Vibrations Using Digital Waveguides Adapted By Optimization Technics

Mitsuko Aramaki

*C.N.R.S. Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique,
31 Chemin Joseph Aiguier 13402 Marseille, France
aramaki@lma.cnrs-mrs.fr*

Olivier Gipouloux

*SC^m Calcul Scientifique et Modélisation Mathématique, Université de Saint Etienne,
23 Rue du Docteur P. Michelon 42023 Saint Etienne, France and
C.N.R.S. Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique,
31 Chemin Joseph Aiguier 13402 Marseille, France
gipouloux@lma.cnrs-mrs.fr*

Abstract

In this article, we propose a method of calibration of existing synthesis models of membrane and thin plate vibrations using optimization technics. In this context, the digital waveguides are used as a tool to generate quickly a lot of modes and not used to describe the physical phenomena that occur in the reality. In particular, the parameters of the synthesis models are estimated from the analysis of real signals collected on experimental setup, to determine an equivalent structure more simple.

1 Introduction

This study is included in a larger project of the synthesis of piano tones. It concerns the role of the soundboard in the sound production and particularly, the simulation of the soundboard vibrations. For that purpose, we start our study by considering simple cases as membranes and thin plates. Such mechanical systems produce thousands of modes, which makes generally costly numerical simulations of their vibrations. Indeed, this work not attempts to describe the physical phenomena that occur inside the structure. We want to obtain good enough sounds using a simple synthesis model. The parameters of this model are accurately calibrated by an optimization method. In this framework, the presented method is expected to be generalized in such a way that we could be able to synthesize sounds generated by a complex structure (as piano soundboard) with a simple model of membrane.

We first present the concept of digital waveguide models. Secondly, we describe the experimental setup on which experimental signals are collected. Then, we present the analysis method to extract physical properties of the mechanical

structure. We finally develop the optimization method to calibrate the parameters of the synthesis model from the experimental data.

2 Digital waveguide models

We have previously developed two models to synthesize the vibrations of simple bi-dimensional structures such as membranes or thin plates [2]. The first one is an extension of one-dimensional coupled digital waveguides formerly used to describe the coupling between two piano strings [1], or used in the context of room acoustics simulations [5]. The model itself does not formally represent 2D systems like digital waveguides meshes [4], but describes directly the coupling between N waveguides as a sum of N other waveguides. This model allows to simulate accurately the solution of the rectangular and circular membrane and thin plate equations with internal losses, with Dirichlet boundary conditions. The synthesis model is built from a summation of elementary digital waveguides. Let us write its transfer function

as:

$$H(\omega) = \sum_{m=1}^M H_m(\omega) \quad (1a)$$

where

$$H_m(\omega) = \frac{F_m(\omega)}{1 - G_m(\omega)e^{-i\Phi_m(\omega)}} \quad (1b)$$

The resonances generated by this model correspond to all the poles of the $H_m(\omega)$.

The second model consists in characterizing the mechanical system by an unique waveguide, which transfer function is written:

$$H(\omega) = \frac{F(\omega)}{1 - G(\omega)e^{-i\Phi(\omega)}} \quad (2)$$

This model is more global than the first one and based mainly on perceptive criteria. In 2D systems for which there is no harmonicity or almost harmonicity of the partials like on 1D systems, the important perceptual elements are transient attack (shocks) and main resonances (modes). In the generated spectrum, after the low frequency resonances, it becomes difficult to distinguish separate modes. The modal density increases with respect to frequency and the spectral density becomes continuous. Thus, this property on the spectral density could avoid estimating the phase analytically by calculating all the eigen frequencies values.

For these two approaches, the concept is shown in the figure (1). The parameters of the models can be defined from the physical parameters as the tension, the geometrical dimensions, the mass, the damping and amplitude laws (see [2] for calculation details). The determination of these two last quantities are essential for the accuracy of the synthesis model from a perceptive point of view. Indeed, the damping factor is one of the intrinsic features of the material and participates to its signature in the generated sound. The amplitude law corresponds to the energy restituted by the mechanical structure and is also representative of the sound tone.

Practically, we have to deal with the inverse problem which consists in determining the parameters of the synthesis model from the physical parameters of the mechanical structure that we study. For that purpose, we have measured these physical parameters from the analysis of experimental signals collected on a setup which will be described in the next section.

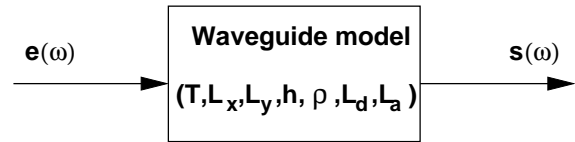


FIG. 1: Concept of the parametrized digital waveguide model characterized by the transfer function $H(\omega)$. The parameters are the tension (T), the geometrical dimensions (L_x, L_y, h), the mass per volume unit (ρ), the damping (L_d) and amplitude laws (L_a).

3 Experimental setup

3.1 Description

For a first step, we have built a simple setup which consists in a rigid structure constituted by two rectangular wooden frames, between which plane elements could be clamped. The structure is then mounted on four legs to avoid cavity resonances with the floor. We have tested thin plates in several materials as steel, glass, plywood or aluminium. Plates are excited by a hammer force and we measure the transversal vibrations with a small accelerometer.

The choice of the excitation and measurement points is very important. Indeed, they can modify the obtained results by canceling some resonances or favoring other ones. Thus, to excite the fundamental mode without neglect the even ones, we have excited the plates and measured the vibrations in a neighborhood of the center.

3.2 Analysis method

The experimental signals are collected on DAT cassettes. They are classified and analyzed with the following method, which has been previously developed [6], [7]. Thus, we could extract from real signals the damping and amplitude laws.

For given excitation and measurement points, the excitation force of the hammer and the transversal acceleration of the plate are stored. We estimate the corresponding transfer function which consists in a simple division of the Fourier transform of these two quantities. In this way, the obtained functions are normalized in order to be compared. Then, from these functions, we extract the amplitude and damping laws for the different materials. The analysis method is based on the bark band representation as shown in the figure (2). Indeed, this scale has the advantage to be close to the critical bands of the human ear.

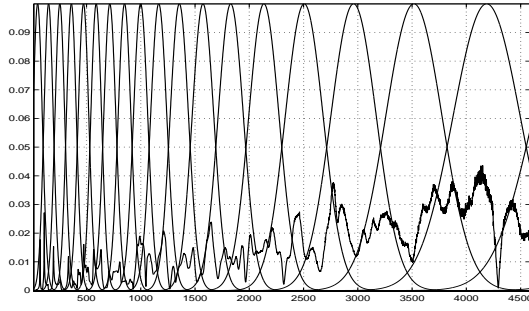


FIG. 2: Experimental transfer function obtained for the plywood as function of the frequency. The Gaussian functions represented here, are all one bark-width and are used as analysis windows to filter the transfer function on each bark interval.

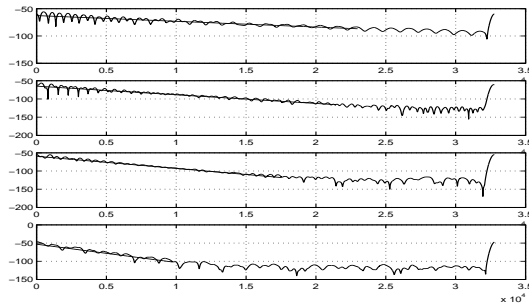


FIG. 3: Example of the damping coefficient estimation for the 2th, 3th, 4th and 5th bark interval for the plywood.

The spectrum is isolated on each bark interval using Gaussian functions : we multiply the spectrum by a Gaussian function centered on the bark interval. We calculate the corresponding analytical signal. Then, we fit the logarithm of the modulus of this analytical signal by a first order polynomial. Thus, the damping value is obtained by determining its slope. For example, the figure (3) shows the estimation of the damping coefficient values, for the plywood, for the 2th to the 5th bark interval.

For a given material, the damping law is de-

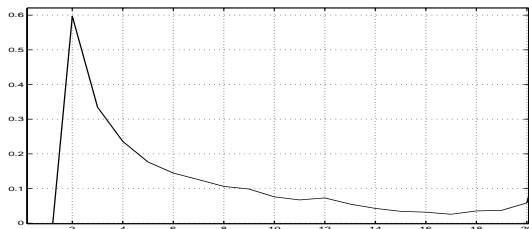


FIG. 4: Estimation of the average damping law (in second) for the plywood as function of bark.

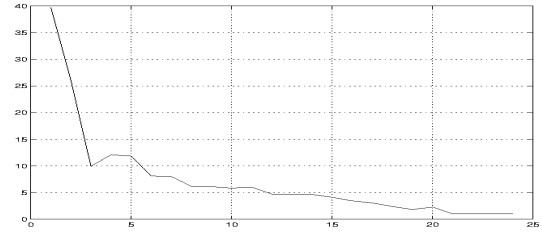


FIG. 5: Estimation of the average damping law (in second) for the glass as function of bark.

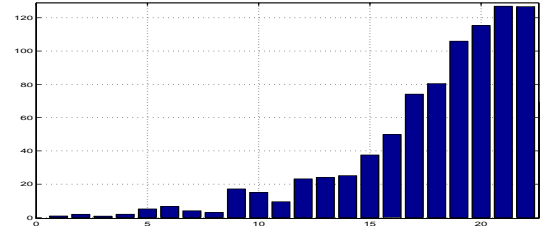


FIG. 6: Estimation of the average energy law (normalized by the size of the bark) for the plywood as function of bark.

duced from the different measurements by averaging all the curves. The damping law obtained for the plywood is shown on figure (4) and the one for the glass is shown on figure (5). They seem to be realistic except for the first bark intervals. Effectively, in this frequency domain, there is not enough information by bark. To overcome this difficulties, one may for example treat differently the first intervals from the rest of the spectrum : the parameters would be deduced locally as long as we could distinguish separately modes and for higher frequencies, we work globally as explained before. This part of our work is still in progress.

As for the damping law, the energy law is deduced from the different measurements by averaging all the curves for a given material. The energy law obtained for the plywood is shown on figure (6).

4 Optimization Process

As explained in section 3 , we have extracted the damping and amplitude laws for different materials. For each of these materials, we may construct a waveguide as described in section 2. As shown on figure 1, and explained in [2], the waveguide may be seen as a function of all the physical parameter (the tension T , the geometrical dimensions L_x , L_y , h , the mass per volume unit ρ , the damping L_d and amplitude

laws L_a). Then it is possible to study the dependence on each of those parameters by computing the derivative of the transfer function in regard of all those parameters. Using this information, we may, by optimization process, adapt the waveguide to the measured signal..

4.1 physical parameters dependence of the digital waveguide

For shake of simplicity, let consider the second model waveguide (2). $H(\omega)$ may be considered as:

$$H(\omega) = H(\omega, z) = \frac{F(\omega, z)}{1 - G(\omega, z)e^{-i\Phi(\omega, z)}} \quad (3a)$$

where

$$z = (z_k)_{k=1,7} = (T, L_x, L_y, h, \rho, L_d, L_a) \quad (3b)$$

Let now consider for example the dependence in z_k of the transfer function of this waveguide (suppose that all the quantities are smooth enough). One may compute the derivative $\frac{\partial H(\omega, z)}{\partial z_k}$ by :

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial z_k}(\omega, z) &= \lim_{\delta z_k \rightarrow 0} \frac{H(\omega, z + \Delta z_k) - H(\omega, z)}{\delta z_k} \\ &= \frac{\frac{\partial F}{\partial z_k}(\omega)}{1 - G(\omega)e^{-i\Phi(\omega)}} + \\ &\quad \frac{F(\omega) \left[\frac{\partial G}{\partial z_k}(\omega)e^{-i\Phi(\omega)} + iG(\omega) \frac{\partial \Phi}{\partial z_k}(\omega)e^{-i\Phi(\omega)} \right]}{(1 - G(\omega)e^{-i\Phi(\omega)})^2} \end{aligned}$$

where $\Delta z_k = (\delta_{lk}\delta z_k)_{l=1,7}$ and $\frac{\partial F}{\partial z_k}, \frac{\partial G}{\partial z_k}, \frac{\partial \Phi}{\partial z_k}$ may be computed as the same way or directly from their expression [2]. By computation of this derivative for each of the physical parameters, one may study the influence of each of them on the transfer function H . More precisely, one may use those informations to find "the best waveguide" approximating a real bi-dimensional structure by adapting the constants of the waveguide by minimization of one criterium linking the measured signal and the transfer function H .

4.2 Optimization of the waveguide

The goal in this section is to explain how we can adapt the waveguide to a measured signal: we will find an equivalent thin plate given by its waveguide transfer function by adapting the physical coefficients in it. More precisely, we

will develop an approach similar to the one described in [3]. Let consider a quadratic function \mathcal{C} linking $t(\omega) = \frac{s(\omega)}{e(\omega)}$ where $s(\omega)$ is the measured signal obtained with the excitation $e(\omega)$ and the transfer function $H(\omega, z)$ by the error between the twice signals (for example $\mathcal{C}(z) = \frac{1}{2} \int (t(\omega) - H(\omega, z))^2 d\omega$). Knowing the gradient of the waveguide transfer function in regard on all the physical parameters, one may compute the gradient of \mathcal{C} in function of z and construct an algorithm which minimize this quadratic error (Algorithm I). By this way, we obtain the equivalent plate waveguide transfer function which is the best approximation of the vibration of the experimental plate one (in regard of the waveguide model and the criterium \mathcal{C} chosen).

5 Conclusion

The approach developed in this paper give a way to adapt simple digital waveguide to real situation of bidimensional vibrations of thin structures. We have given an analyse approach based on the bark representation of the spectrum of the signal to extract the damping and amplitude laws. Using this information and optimization technics, we have developed an algorithm to adapt the waveguide parameters to the real situation. By this way, one may compute the better waveguide approximation of the vibration of the experimental plates. this part of the work is still in progress (numerical implementation).

References

- [1] M. Aramaki, J. Bensa, L. Daudet, R. Kronland-Martinet, and Ph. Guille-

Algorithm I

```

 $\epsilon$  given;  $(z)_{j=1,n} = (z_0)_{j=1,n}$  given
while  $E > \epsilon$  do
  Compute  $H(\omega)$  with parameter set  $(z)_{i=1,n}$ 
  Compute  $\mathcal{C}(z)$ 
  for  $k=1,n$  do
    Compute  $\frac{\partial H}{\partial z_k}(\omega, z)$ 
    Compute  $\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial z_k}(z)$  using  $\frac{\partial H}{\partial z_k}(\omega, z)$ 
  end for
  chose  $h$  such that  $\mathcal{C} + \nabla \mathcal{C} \cdot h \leq \mathcal{C}$ 
  for  $j=1,n$  do
     $z_j \leftarrow z_j + h_j$ 
  end for
end while

```

- main, *Resynthesis of coupled piano string vibrations based on physical modeling*, Proceedings of the Digital Audio Effects Conference: DAFx99 (1999), 135–138, Trondheim, Norway.
- [2] M. Aramaki and Ph. Guillemain, *Synthesis of membrane and thin plate vibrations using adapted digital waveguides*, Proceedings of the International Symposium of Musical Acoustics (2001), 225–228, Perugia, Italy.
 - [3] J. Bensa, O. Gipouloux, and R. Kronland-Martinet, *Understanding the influence of physical parameters on piano sound by the use of an optimization method*, Proceedings of the International Symposium on Musical Acoustics (2001), 247–250, Perugia, Italy.
 - [4] S. Van Duyne and Julius O. Smith III, *Physical modeling with the 2d digital waveguide mesh*, Proceedings of the International Computer Music Conference (1993), 40–47, Tokyo: International Computer Music Association.
 - [5] J.-M. Jot and A. Chaigne, *Digital delay networks for designing reverberators*, Audio Engineering Society Convention (1991).
 - [6] Ystad S. Kronland-Martinet R., Guillemain Ph., *Modelling of natural sounds using time-frequency and wavelet representations*, Organised sound **2** (1997), no. 3, 179–191.
 - [7] S. Ystad, *Sound modeling applied to flute sounds*, Journal of Audio Engineering Society **48** (2000), no. 9, 810–825.

Bibliographie

- [1] J. M. Adrien. *Etude de Structures Complexes Vibrantes, Applications à la Synthèse par Modèles Physiques*. PhD thesis, Université de Paris VI, 1988.
- [2] J. M. Adrien. *The Missing Link: Modal Synthesis*. MIT Press, 1991.
- [3] M. Aramaki, J. Bensa, L. Daudet, R. Kronland-Martinet, and Ph. Guillemain. Resynthesis of coupled piano string vibrations based on physical modeling. In *Proceedings of the Digital Audio Effects Conference: DAFx99*, pages 135–138, 1999. Trondheim, Norway.
- [4] M. Aramaki, J. Bensa, L. Daudet, R. Kronland-Martinet, and Ph. Guillemain. Resynthesis of coupled piano string vibrations based on physical modeling. *Journal of New Music Research*, 30 (3):213–226, 2001.
- [5] M. Aramaki, L. Brancheriau, H. Baillères, Ph. Guillemain, R. Kronland-Martinet, and J.-D. Lanvin. Caractérisation des produits collés à base de bois par l’analyse des vibrations dans le domaine acoustique. In *Actes du 5ième Congrès des Sciences et Industries du bois*, 2000. Nantes, France.
- [6] M. Aramaki, L. Brancheriau, H. Baillères, Ph. Guillemain, R. Kronland-Martinet, and J.-D. Lanvin. Modeling vibrations response of wooden beams with singularities using sound synthesis models. In *Proceedings of the 12th International Symposium on Non-Destructive Testing of Wood*, pages 113–121, 2000. Sopron, Hongrie.
- [7] M. Aramaki and O. Gipouloux. Synthesis of bi-dimensional structure vibrations using digital waveguides adapted by optimization technics. In *Proceedings of the Mosart Workshop*, pages 119–123, 2001. Barcelone, Espagne.
- [8] M. Aramaki and Ph. Guillemain. Synthesis of membrane and thin plate vibrations using adapted digital waveguides. In *Proceedings of the International Symposium of Musical Acoustics*, pages 225–228, 2001. Pérouse, Italie.
- [9] M. Aramaki and R. Kronland-Martinet. Analysis-synthesis of impact sounds by real-time dynamical filtering. article en cours de rédaction.
- [10] B. Bank, G. De Poli, and L. Sujbert. A multi-rate approach to instrument body modeling for real-time sound synthesis applications. In *Proceedings of the AES 112th Convention*, 2002. Preprint No. 5526, Munich, Allemagne.
- [11] B. Bank, L. Sujbert, and G. De Poli. An efficient physics-based piano model using various sampling rates. In *Proceedings of the International Computer Music Conference*, 2002. Göteborg, Suède.
- [12] J. Bensa. *Analyse et synthèse de sons de piano par modèles physiques et de signaux*. PhD thesis, Université d’Aix-Marseille II, 2003.
- [13] X. Boutillon. Model for piano hammers : Experimental determination and digital simulation. *Journal of the Acoustical Society of America*, 83 (2):746–754, 1988.
- [14] L. Brancheriau. *Expertise mécanique non destructive d’éléments en bois par analyse des vibrations dans le domaine acoustique*. PhD thesis, Université de la Méditerranée Aix-Marseille II, 2001.
- [15] R. Bristow-Johnson. Cookbook formulae for audio eq biquad filter coefficients. <http://www.harmony-central.com/Computer/Programming/Audio-EQ-Cookbook.txt>.
- [16] C. Cadoz and O. Grosjean. Modélisation physique du couplage des structures vibrantes dans les instruments de musique à structure complexe. *Journal de Physique IV*, 4:601–604, 1994. colloque C5, supplément au Journal de physique III.
- [17] C. Cadoz, A. Luciani, and J. L. Florens. Cordis-anima : A modeling and simulation system for sound and image synthesis - the general formalism. *Computer Music Journal*, 17 (4):19–29, 1993.
- [18] A. Caracciolo and C. Valette. Damping mechanisms governing plate vibration. *Acta Acustica*, 3:393–404, 1995.

- [19] C. Carello, K. L. Anderson, and A. J. Kunkler-Peck. Perception of object length by sound. *Psychological Science*, 9 (3):211–214, 1998.
- [20] N. Castagne and C. Cadoz. Genesis : a friendly musician-oriented environment for mass-interaction physical modeling. In *Proceedings of the International Computer Music Conference*, pages 330–337, 2002. Göteborg, Suède.
- [21] A. Chaigne and A. Askenfelt. Numerical simulations of struck strings. i. a physical model for a struck string using finite difference methods. *Journal of the Acoustical Society of America*, 95 (2):1112–1118, 1994.
- [22] A. Chaigne and A. Askenfelt. Numerical simulations of struck strings. ii. comparisons with measurements and systematic exploration of some hammer-string parameters. *Journal of the Acoustical Society of America*, 95 (3):1631–1640, 1994.
- [23] J. M. Combes, A. Grossman, and Ph. Tchamitchian. *Wavelets (Time-frequency methods and phase space)*. Springer-Verlag, 1989. New-York.
- [24] Jr. Harold A. Conklin. Design and tone in the mechanoacoustic piano. part II. piano structure. *Journal of the Acoustical Society of America*, 100 (2):695–708, août 1996.
- [25] Ph. Derogis. *Analyse des vibrations et du rayonnement de la table d'harmonie d'un piano droit et conception d'un système de reproduction du champ acoustique*. PhD thesis, Université du Maine, 1997.
- [26] P. Djoharian. Material design in physical modeling sound synthesis. *Journal of New Music Research*, 30 (3):227–241, 2001. Ed. Swets-Zeitlinger.
- [27] G. Essl and P. Cook. Banded waveguides : towards physical modeling of bowed bar percussion instruments. In *Proceedings of the International Computer Music Conference*, pages 321–324, 1999. Beijing, Chine.
- [28] G. Essl and P. Cook. Banded waveguides on circular topologies and of beating modes : Tibetan singing bowls and glass harmonicas. In *Proceedings of the International Computer Music Conference*, pages 49–52, 2002. Göteborg, Suède.
- [29] H. Fletcher, E. D. Blackham, and R. Stratton. Quality of piano tones. *Journal of the Acoustical Society of America*, 34 (6):749–761, 1962.
- [30] F. Fontana and D. Rocchesso. Physical modeling of membranes for percussion instruments. *Acustica*, 84 (1):529–542, 1998.
- [31] F. Fontana and D. Rocchesso. Signal-theoretic characterization of waveguide mesh geometries for models of two-dimensional wave propagation in elastic media. *IEEE Transactions on Speech and Audio Processing*, 9 (2):152–161, 2001.
- [32] W.G. Gardner. Transaural 3-d audio. *M.I.T. Media Laboratory Perceptual Computing Section*, july 1995. Technical Report N° 342.
- [33] W. W. Gaver. *Everyday listening and auditory icons*. PhD thesis, Université de Californie (San Diego), 1988.
- [34] N. Giordano. Simple model of a piano soundboard. *Journal of the Acoustical Society of America*, 102 (2):1159–1168, août 1997.
- [35] N. Giordano. Mechanical impedance of a piano soundboard. *Journal of the Acoustical Society of America*, 103 (4):2128–2133, avril 1998.
- [36] N. Giordano. Sound production by a vibrating piano soundboard: Experiment. *Journal of the Acoustical Society of America*, 104 (3):1648–1653, septembre 1998.
- [37] T. Hikichi and N. Osaka. An approach to sound morphing based on physical modeling. In *Proceedings of the International Computer Music Conference*, pages 108–111, 1999. Beijing, Chine.
- [38] A. Härmä, M. Karjalainen, L. Savioja, V. Välimäki, U. K. Laine, and A. J. Huopaniemi. Frequency-warped signal processing for audio applications. *Journal of the audio engineering society*, 48 (11):1011–1031, novembre 2000.
- [39] J.-M. Jot. *Etude et réalisation d'un spatialisateur de sons par modèles physiques et perceptifs*. PhD thesis, Ecole Nationale Supérieure des Télécommunications Paris, 1992.
- [40] J.-M. Jot and A. Chaigne. Digital delay networks for designing artificial reverberators. *Audio Engineering Society Convention*, février 1991.
- [41] J. Jouhaneau. *Notions élémentaires d'acoustique - Electroacoustique*. Technique & documentation - Lavoisier, 1994. Collection Acoustique Appliquée.

- [42] M. Karjalainen and J. O. Smith. Body modeling techniques for string instrument synthesis. In *Proceedings of the International Computer Music Conference*, pages 232–239, 1996. Hong Kong, Chine.
- [43] J. L. Kelly and C. C. Lochbaum. Speech synthesis. In *Proceedings of the Fourth International Congress on Acoustics*, pages 1–4, 1962. Copenhagen, Danemark.
- [44] R. L. Klatzky, D. K. Pai, and E. P. Krotkov. Perception of material from contact sounds. *Presence : Teleoperators and Virtual Environments*, 9(4):399–410, 2000.
- [45] S. Lakatos, S. McAdams, and R. Caussé. The representation of auditory source characteristics : simple geometric form. *Perception and Psychophysics*, 59:1180–1190, 1997.
- [46] Ch. Lambourg. *Modèle temporel pour la simulation numérique de plaques vibrantes - Application à la synthèse sonore*. PhD thesis, Université du Maine, 1997.
- [47] J. Laroche. *Etude d'un système d'analyse et de synthèse utilisant la méthode de Prony - Application aux instruments de musique de type percussif*. PhD thesis, Ecole Nationale Supérieure des Télécommunications Paris, 1989.
- [48] J. Laroche. The use of matrix pencil method for the spectrum analysis of musical signals. *Journal of the Acoustical Society of America*, 94 (4):1958–1965, 1993.
- [49] J. D. Markel and A. H. Gray. *Linear Prediction of Speech*. Springer-Verlag, 1976. New-York.
- [50] J. Morrison and J. M. Adrien. Control mechanisms in the mosaic synthesis program. In *Proceedings of the International Computer Music Conference*, pages 19–22, 1991. Montréal, Canada.
- [51] J. Morrison and J. M. Adrien. Mosaic: A framework for modal synthesis. *Computer Music Journal*, 17 (1):45–56, 1993.
- [52] P. M. Morse and K. U. Ingard. *Theoretical acoustics*. McGraw-Hill Book Company, 1968. New-York.
- [53] H. F. Pollard and E. V. Jansson. A tristimulus method for the specification of musical timbre. *Acustica*, 51:162–171, 1982.
- [54] C. Roads. *L'audionumérique*. Dunod, 1998.
- [55] D. Rocchesso and Julius O. Smith. Circulant and elliptic feedback delay networks for artificial reverberation. *IEEE Transactions on Speech and Audio*, 5:51–60, 1996.
- [56] L. Savioja, J. Backman, A. Järvinen, and T. Takala. Waveguide mesh method for low-frequency simulation of room acoustics. *Proceedings of the 15th international Conference on Acoustics (ICA-95)*, pages 637–640, 1995.
- [57] M. R. Schroeder. Natural-sounding artificial reverberation. *Journal of the Audio Engineering Society*, 10 (3):219–233, 1962.
- [58] S. Serafin, P. Huang, and J. O. Smith. The banded digital waveguide mesh. In *Proceedings of the Workshop on Current Research Directions in Computer music*, pages 255–258, 2001. Barcelone, Espagne.
- [59] J. O. Smith. Physical modeling using digital waveguides. *Computer Music Journal*, 16 (4):74–87, 1992.
- [60] Julius O. Smith and Scott A. Van Duyne. Commuted piano synthesis. In *Proceedings of the International Computer Music Conference*, pages 319–326, 1995.
- [61] Julius O. Smith and Scott A. Van Duyne. Developments for the commuted piano. In *Proceedings of the International Computer Music Conference*, 1995.
- [62] J. Stautner and M. Puckette. Designing multichannel reverberators. *Computer Music Journal*, 6 (1):52–65, 1982.
- [63] K. Steiglitz and L. E. McBride. A technique for the identification of linear systems. *IEEE Trans. Automatic Control*, AC-10:461–464, 1965.
- [64] S. S. Stevens. Perceived level of noise by mark vii and decibels (e). *Journal of the Acoustical Society of America*, 51 (2):575–601, 1972.
- [65] E. Terhardt. Calculating virtual pitch. *Hearing research*, 1:155–182, 1979.
- [66] S. Tucker and G. J. Brown. Investigating the perception of the size, shape and material of damped and free vibrating plates. 2002. Technical Report CS-02-10.
- [67] G. Weinreich. Coupled piano strings. *Journal of the Acoustical Society of America*, 62 (6):1474–1484, 1977.
- [68] R. P. Wildes and W. A. Richards. Recovering material properties from sounds. *Natural computation*, pages 356–363, 1988.

- [69] K. Wogram. *The strings and the soundboard*, volume 64. in Five Lectures on the Acoustics of the Piano, edited by A. Askenfelt, 1990. Kungl. Musikaliska Akademien, Stockholm, Publications issued by the Royal Swedish Academy of Music.
- [70] E. Zwicker and R. Feldtkeller. *Psychoacoustique, l'oreille récepteur d'information*. Ed. Masson, 1981. Collection technique et scientifique des télécommunications, traduit de l'allemand par C. Sorin.

Références sonores sur le CD d'accompagnement

- Piste 1 :** Son d'impact sur une plaque mince rectangulaire en bois (signal d'accéléromètre).
- Piste 2 :** Son d'impact sur une plaque mince rectangulaire en contre-plaqué (signal d'accéléromètre).
- Piste 3 :** Son d'impact sur une plaque mince rectangulaire en verre (signal d'accéléromètre).
- Piste 4 :** Son d'impact sur une plaque mince rectangulaire en fer (signal d'accéléromètre).
- Piste 5 :** Synthèse de vibrations de poutre à l'aide du modèle décrit dans le paragraphe 2.2.
- Piste 6 :** Séquence aléatoire de sons d'impact (obtenus de manière expérimentale) sur des poutres comportant un défaut localisé à différents endroits. Le protocole expérimental est décrit dans le paragraphe 2.4.
- Piste 7 :** Séquence aléatoire de sons de synthèse correspondant à la piste 6. L'obtention de ces sons de synthèse est décrit dans le paragraphe 2.4.
- Piste 8 :** Son de synthèse de vibrations de membrane rectangulaire obtenu avec le modèle guide d'onde constitué d'une somme de guides d'ondes élémentaires décrit dans le paragraphe 3.2.2. Ce signal est obtenu par addition successive des contributions de chaque guide d'onde élémentaire.
- Piste 9 :** 3 sons de synthèse de vibrations de membrane rectangulaire obtenu avec le modèle de synthèse constitué d'une somme de guides d'onde élémentaires décrit dans le paragraphe 3.2.2.
- Piste 10 :** 3 sons de synthèse de vibrations de membrane rectangulaire obtenu avec le modèle de synthèse constitué d'un seul guide d'onde (modèle guide d'onde généralisé) décrit dans le paragraphe 3.2.3 pour le même ensemble de paramètres utilisé pour les sons de la piste 9.
- Piste 11 :** Son original expérimental de membrane rectangulaire (joué 3 fois).
- Piste 12 :** Son de resynthèse du signal original précédent de la piste 11 (joué 3 fois). Les paramètres de resynthèse sont obtenus à partir des méthodes d'analyse du signal original décrit en 3.3.
- Piste 13 :** Réponse impulsionnelle expérimentale de la table d'harmonie d'un piano (signal d'accéléromètre positionné sur le chevalet).
- Piste 14 :** Son de resynthèse de la réponse impulsionnelle de la table d'harmonie (piste 13) obtenu avec le modèle dynamique décrit dans le chapitre 4. Les paramètres de synthèse sont obtenus à partir des méthodes d'analyse du signal expérimental.
- Piste 15 :** Exemple illustrant les applications possibles dans la réalité virtuelle : simulation de sons produit par des billes métalliques qui tombent. Ces sons sont obtenus avec le modèle de membrane (chapitre 3).
- Piste 16 :** Exemple illustrant les applications possibles dans la réalité virtuelle : simulation de sons produit par des billes métalliques qui tombent. Ces sons sont obtenus avec le modèle de membrane (chapitre 3).
- Piste 17 :** Exemple illustrant les applications possibles dans la réalité virtuelle : simulation de sons produit par des billes métalliques qui tombent. Ces sons sont obtenus avec le modèle de membrane (chapitre 3).
- Piste 18 :** Création de nouvelles sonorités obtenues avec le modèle dynamique (chapitre 4). Simulation de sons d'impact sur une structure complexe à caractère métallique. Cet exemple sonore montre le fait de simuler un impact plus ou moins fort sur la structure.
- Piste 19 :** Création de nouvelles sonorités obtenues avec le modèle dynamique (chapitre 4). Cet exemple sonore montre une application possible dans une boîte à rythme.

- Piste 20 :** Création de nouvelles sonorités obtenues avec le modèle dynamique (chapitre 4). Simulation de sons d'impact sur une structure complexe à caractère boisé.
- Piste 21 :** Création de nouvelles sonorités obtenues avec le modèle dynamique (chapitre 4). Simulation de sons d'impact sur une structure complexe à caractère métallique.
- Piste 22 :** Effet de *morphing* (évolution continue d'un son à un autre) permettant de passer continûment d'un son à caractère métallique à un son à caractère boisé.
- Piste 23 :** Son original de vibration de corde de piano.
- Piste 24 :** Son de resynthèse correspondant à la piste 23 obtenu avec le modèle couplé décrit dans le paragraphe 5.5.1.
- Piste 25 :** Signal d'accéléromètre placé sur le chevalet lorsqu'une mélodie est jouée au piano (chapitre 5).
- Piste 26 :** Signal de pression acoustique de l'oreille gauche de la tête artificielle lorsque la même mélodie (piste 25) est jouée.
- Piste 27 :** Restitution en stéréo d'un son de synthèse de piano (chapitre 5).